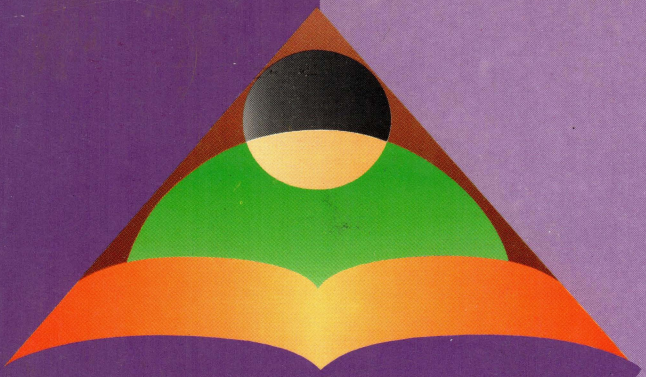


۷۰۷ آزمون

ریاضی ویژه نظام جدید

مکمل مباحث حد ، دنباله ، مشتق ، انتگرال ،
احتمال ، گراف ، جبر خطی ، اعداد مختلط ،
همراه با کنکورهای نظام جدید وپیش دانشگاهی

تألیف :

غلامرضا صفاکیش همدانی

عضو هیأت علمی دانشگاه بوعلی سینا

با همکاری جمعی از استادان دانشگاه و
دبیران مجرب

به نام خدا

۷۰۷

آزمون ریاضی ویژه نظام جدید

مکمل مطالب نظام جدید

تألیف: غلامرضا صفاکیش همدانی

۷۰۷ آزمون ریاضی ویژه نظام جدید

تألیف: غلامرضا صفاکیش‌همدانی

چاپ اول / پاییز ۷۷ ـ تیراژ / ۳۰۰۰ نسخه

چاپ / میهن

صحافی / تیماج

قیمت : ۶۰۰ تومان

شابک : ۰-۵-۹۱۸۸۱-۹۶۴ (جلد ۵)
ISBN : 964 - 91881 - 5 - 0 (VOL.5)

شابک :۶-۲-۹۱۸۸۱-۹۶۴ (دوره ۱۱ جلدی)
ISBN : 964 - 91881 - 2 - 6 (11 VOL.SET)

انتشارات ریاضی

فهرست مطالب

۷۷ تست از توابع و دنباله‌ها و سریها ۱
۵۵ تست از حد و پیوستگی ۱۵
۷۷ آزمون از مشتق ۲۳
۳۳ آزمون از توابع نمایی و لگاریتمی ۳۶
۵۵ آزمون از انتگرال ۴۵
۳۳ آزمون از احتمال و نظریهٔ اعداد ۵۵
۳۳ آزمون‌از گرافها ۶۱
۲۲ آزمون ازاعداد مختلط ۶۹
۵۵ آزمون از جبر خطی ۷۳
۶ آزمون از توابع هموگرافیک ۸۵
سؤالات کنکور های نظام جدید و پیشدانشگاهی ۸۷
سؤالات کنکور مرحلهٔ اول ۷۶-۷۵ ..... ۸۷
سؤالات کنکور پیشدانشگاهی ۷۶-۷۵ ..... ۹۵
سؤالات کنکور مرحلهٔ دوم ۷۶-۷۵ ..... ۱۰۳
سؤالات کنکور پیشدانشگاهی ۷۷-۷۶ ..... ۱۱۴
سوالات کنکور سراسری سال ۷۷-۷۶ نظام جدید ۱۲۱
پاسخ تشریحی تستها ۱۳۳
سوالات کنکور سراسری سال ۷۸-۷۷ نظام جدید ۲۵۳
پاسخ تشریحی کنکور سراسری سال ۷۸-۷۷ ..... ۲۶۰
سوالات کنکور پیشدانشگاهی ۷۸-۷۷ ..... ۲۷۰
پاسخ تشریحی کنکور پیشدانشگاهی ۷۸-۷۷ ..... ۲۷۷
مسابقهٔ ریاضی ۲۸۴

«بسم الله الرحمن الرحیم»

پیشگفتار مؤلف و روش استفاده از کتاب

اگر چه امتحانات تستی و نوع ارزشیابی آن روش صددرصد مطمئنی نیست، اما به اقتضای نیاز علاقه‌مندان، دانش‌آموزان گرامی، دانشجویان و مخصوصاً در راستای ایجاد انگیزه برای مطالعه بیشتر و دقیق‌تر اقدام به تألیف این کتاب نمودم. تست‌های موجود در این کتاب بر اساس بخش‌هایی است که در کتابهای نظام قدیم نبوده و در کتابهای نظام جدید آموزشی گنجانده شده است این تستها مکمل تستهای این مجموعه برای نظام جدید است آن دسته از تستهایی که برای دانش آموزان نظام قدیم قابل استفاده نمیباشد با علامت ♣ مشخص شده است. سعی بر آن بوده که نکات مهم و ضروری در حد کمال بیان شود.

جهت استفاده صحیح از این کتاب ابتدا مبحث مربوطه را در کتاب‌های مربوطه خوانده، بعد از مطالعه، تست‌های این کتاب را پاسخ دهید. سپس پاسخ‌ها و راه‌حل‌های خود را با پاسخ‌ها و راه‌حل‌های کتاب مقایسه نمایید. سعی کنید ایرادهای خود را تشخیص داده، آن‌ها را برطرف نمایید. در صورتی که درصد جواب‌های درست شما کم بود به هیچ عنوان مأیوس نشوید، چون تست‌های موجود در این کتاب از بالاترین سطح کیفی هندسه دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی برخوردار است و سوالات مطرح شده بیش از آنکه به حافظه مربوط باشد به تفکر نیاز دارد.

نقاط مثبت و محاسن این کتاب مرهون زحمات همکاران، دانشجویان و دانش‌آموزانی است که این کتاب را مطالعه نموده و در برطرف نمودن نواقص، اینجانب را یاری نموده‌اند.

بدون شک نظرات سازنده شما در جهت بهبود این کتاب و روش‌های موجود بسیار مفید خواهد بود. شما می‌توانید پس از مطالعه این کتاب نظرها و پیشنهادهای خود را به نشانی‌های زیر ارسال فرمایید. در صورت ارائهٔ راه حلهای دیگر برای مسائل جوابزی برای شما ارسال می‌شود. برای اطلاعات بیشتر صفحات آخر کتاب قسمت **مسابقهٔ ریاضی** را مطالعه کنید.

مؤلف

همدان ـ دانشگاه بوعلی سینا ـ صندوق پستی ۴۱۵۱

تهران ـ دانشگاه صنعتی شریف ـ دانشکده ریاضی ـ غلامرضا صفاکیش همدانی

۷۷ تست از توابع و دنباله‌ها و سریها

۱- دامنه تابع با ضابطه $y=\sqrt{cos^{۲}x-[cosx]}$ کدام است؟

۱) R ۲) $R-\{۰\}$

۳) $R-\{k\pi : k\in Z\}$ ۴) هیچکدام

۲- برد تابع سوال قبلی کدام است؟

۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $[۰,۱)\cup(۱,\sqrt{۲})$

۳) $[۰,\sqrt{۲}]$ ۴) $(-\sqrt{۲},-۱)\cup(۰,۱)\cup(۱,\sqrt{۲})$

۳- برد تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۳}x^{۲}+۲x-\sqrt{۳}}{x^{۲}+۱}$ کدام است؟

۱) $y\geq ۲$ ۲) $y\neq\sqrt{۳}\ ,\ ۲\geq y\geq -۲$

۳) $۰\geq y\geq -۲$ ۴) $-\sqrt{۳}<y\leq\sqrt{۳}$

۴- تابع $f(x)=۲x-sin(x-۲)$ مفروض است حاصل $f^{-۱}(۴)+f(۲)$ کدام است؟ ($f^{-۱}$ وارون f است)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۵- تابع حقیقی به معادلهٔ $f(x)=\begin{cases}۳ & x<۲\\ ۴x-۵ & x\geq ۲\end{cases}$ را با کدام یک از ضابطه‌های زیر می‌توان نشان داد؟

۱) $f(x)=-۲x+۱+۲|x-۲|$ ۲) $f(x)=۲x-۱+۲|x-۲|$

۳) $f(x)=۲x-۱-۲|x-۲|$ ۴) $f(x)=۲x+۱+۲|x-۲|$

۶- توابع $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۰,۳)\}$ و $g=\{(۲,۴),(۳,۱)\}$ مفروضند، وارون تابع gof کدام است؟

۱) $\{(۱,۴),(۲,۳)\}$ ۲) $\{(۴,۱),(۱,۰)\}$

۳) $\{(۴,۲),(۱,۴)\}$ ۴) $\{(۰,۲),(۵,۱)\}$

۷- دامنه تعریف تابع به معادلهٔ $f(x)=\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{[x]+[-x]}$ کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $(-۱,۱)$

۳) $R-Z$ ۴) $(-۱,۰)\cup(۰,۱)$

۸- دامنهٔ تعریف تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{-sin^۲\pi[x]}$ کدام است؟

۱) R ۲) Z ۳) $R-Z$ ۴) ϕ

۹- اگر $f(x-۱)+۲f(۱-x)=۴x-۴$ آنگاه f تابعی:

۱) فرد است ۲) زوج است

۳) نه فرد و نه زوج است ۴) هم فرد هم زوج است

۱۰- تابع $f:[۰,۱]\to[-۱,۱]$ تحت ضابطهٔ $f(x)=cos^۲\frac{\pi x}{۲}-sin^۲\frac{\pi x}{۲}$ به کدام صورت زیر است؟

۱) یک به یک ۲) پوششی

۳) یک به یک و پوششی ۴) **هیچکدام**

۱۱- تابع f در R با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$

مفروض است تابع معکوس f برابر است با:

۱) $x^۲$ ۲) $-x^۲$ ۳) $x|x|$ ۴) $-x|x|$

۱۲- اگر برای هر a, b ، $f(ab) = [f(a)]^b$ آنگاه $f(x)$ کدامست ؟

۱) $[f(۱)]^x$ ۲) x

۳) $[f(\frac{۱}{۲})]^{۲x}$ ۴) ۱ و ۳

۱۳- اگر $f(x)$ تابعی درجه اول نسبت به x و $f(f(x)) = x+۲$ ، مقدار $f(۵)$ کدامست؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۷

۱۴- دامنهٔ تابع $f(x) = |x| + \sqrt{x sin^۲ \pi x}$ کدام است؟

۱) $]۱, +\infty[$ ۲) $]۰, +\infty[$

۳) $]۰, +\infty[\cup Z$ ۴) $[۰, ۱]$

۱۵- اگر $g(x)=\sqrt{x}$ و $fog(x) = \frac{x}{x+۱}$ ، $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{x^۲}{x^۲+۱}$ ۲) $\frac{۱-tay^۲x}{۱+tay^۲x}$

۳) $\frac{۱-x}{۱+x}$ ۴) $\frac{cos ۲x}{۱-sin ۲x}$

۱۶- اگر $f(x) = logx$ و $z = \frac{f(x)+f(y)}{f(\sqrt{xy})}$ ، z برابر است با :

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲-

۱۷- اگر f تابعی بر R به توی R باشد که در رابطهٔ به ازای هر a, b از R ، $f(a+b) = f(a)+f(b)$ صدق کند $f(na)$ (n عدد طبیعی) کدام است ؟

۱) $f(a).f(a)-n$ ۲) $nf(a)$

۳) $f(a).f(a)$ ۴) $f(a)+n$

۱۸- اگر $af(x)+۲bf(-x)=۲x^۲$ و $a+۲b\neq ۰$ ، در اینصورت $f(x)$ برابر است با:

۱) $\frac{x^۲}{a-b}$ ۲) $\frac{ax^۲}{a-b}$

۳) $\frac{۲x^۲}{a+۲b}$ ۴) $\frac{۲x^۲}{a-b}$

۱۹- اگر $f(x)$ از درجه اول باشد $fff(x)$ از درجه چند است؟

۱) اول ۲) دوم

۳) سوم ۴) نمی‌توان معین کرد.

۲۰- تابع $f:R^۲\to R$ بصورت $f(x,y)=x+y$ تعریف شده است اگر $A=\{۵\}$، آنگاه $f^{-۱}(A)$ عبارتست از:

۱) دو خط موازی

۲) خطی موازی نیمساز ربع اول و سوم

۳) دو خط متقاطع

۴) خطی موازی نیمساز ربع دوم و چهارم

۲۱- تابع $f:R^۲\to R^۲$ با ضابطهٔ $f(x,y)=(-x+y+۱\ ,\ x-y-۱)$ ...

۱) تابعی یک به یک و پوششی است.

۲) فقط یک به یک است.

۳) فقط پوششی است.

۴) نه یک به یک و نه پوششی است.

۲۲- برد تابع $f(x)=\sqrt{۳x-x^۲-۲}$ برابر است با:

۱) $R_f=[۰,+\infty)$ ۲) $R_f=[۱,۲]$

۳) $R_f=[۰,\frac{۱}{۴}]$ ۴) $R_f=[۰,\frac{۱}{۲}]$

۲۳- برد تابع $f(x)=\frac{x^۲+۳}{\sqrt{x^۲+۱}}$ برابر است با:

۱) $R_f=R$ ۲) $R_f=[۰,+\infty)$

۳) $R_f=[۱,+\infty)$ ۴) $R_f=[۲\sqrt{۲},+\infty)$

♣ ۲۴- کدام یک از سریهای زیر واگرا است؟

۱) $\sum_{k=۱}^{+\infty}\frac{۱}{۲^{k-۱}}$ ۲) $\sum_{k=۱}^{+\infty}\frac{۱}{k}$

۳) $\sum_{k=۱}^{+\infty}\frac{۱}{(۳k-۱)(۳k+۲)}$ ۴) $\sum_{k=۱}^{+\infty}(-۱)^{k+۱}\frac{۲k+۱}{k(k+۱)}$

♣ ۲۵- کدام یک از سریهای زیر همگرا است؟

۱) $\sum_{k=۱}^{+\infty}\frac{۲k-۱}{۲k}$ ۲) $\sum_{k=۱}^{+\infty}\frac{۱}{\sqrt{k-۱}+\sqrt{k}}$

۳) $\sum_{k=۱}^{+\infty}\frac{۱}{k(k-۱)(k+۲)}$ ۴) $\sum_{k=۱}^{+\infty}\frac{۱}{k}$

♣ ۲۶- دنبالهٔ $\{an\}$ با جملهٔ عمومی $u_n=\frac{\sqrt{n}}{n^۲+۱}$ را داریم جملهٔ چهارم آن برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲۶}$ ۳) $\frac{۲}{۱۷}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰}$

♣ ۲۷- اگر $a_n=۲n-۱$ ، جملات دنباله برابر است با:

۱) $...,\sqrt{۳},\sqrt{۲},۱$ ۲) $...,۹,۴,۱$

۳) $...,۵,۳,۱$ ۴) $...,۱۶,۸,۴,۲$

♣ ۲۸- دنبالهٔ $a_n=sin(n^۵)$ واگرا است زیرا:

۱) در صفر حد ندارد ۲) به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

۳) در صفر حد دارد ۴) هیچکدام

آزمونهایی که علامت ♣ دارند مخصوص دانش‌آموزان نظام جدید است.

♣ ۲۹- کدام یک از گزینه‌های زیر برای دنبالهٔ $u_n=\frac{n}{n+۲}$ صدق می‌کند؟

۱) همگرا است و عدد همگرایی آن $\frac{۱}{۲}$ است.

۲) همگرا است و عدد همگرایی آن $\frac{۳}{۲}$ است.

۳) واگرا است و عدد واگرایی آن $\frac{۱}{۲}$ است.

۴) واگرا است و عدد واگرایی آن $\frac{۳}{۲}$ است.

♣ ۳۰- کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد دنبالهٔ $u_n=\frac{n^۲}{n^۲+۱}$ صحیح نیست؟

۱) از پایین کراندار است ۲) کران ندارد

۳) از بالا کراندار است ۴) $n\in N \Rightarrow u_n<۱$

♣ ۳۱- اگر $\sum_{k=۱}^{+\infty} a_k$ همگرا و $\sum_{k=۱}^{+\infty} b_k$ واگرا باشد آنگاه:

۱) $\sum_{k=۱}^{+\infty} (a_k+b_k)$ واگرا است

۲) $\sum_{k=۱}^{+\infty} (a_k+b_k)$ همگرا است

۳) $\sum_{k=۱}^{+\infty} a_k-\sum_{k=۱}^{+\infty} b_k$ همگرا است

۴) $\sum_{k=۱}^{+\infty} a_k+\sum_{k=۱}^{+\infty} b_k$ همگرا است

♣ ۳۲- سری $\sum_{k=۱}^{+\infty} \left(\frac{۱}{k}-\frac{۱}{۲^k}\right)$ واگرا است زیرا:

۱) $\sum_{k=۱}^{+\infty} \frac{۱}{k}$ همگرا و $\sum_{k=۱}^{+\infty} \frac{۱}{۲^k}$ همگرا می‌باشد.

۲) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ واگرا و $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$ واگرا می‌باشد.

۳) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ واگرا و $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$ همگرا می‌باشد.

۴) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ همگرا و $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$ واگرا می‌باشد.

**۳۳- برای دنبالهٔ $\left\{ (1+\frac{(-1)^n}{n}) \right\}$ کدام گزینهٔ صحیح است.

۱) غیر یکنوا، کراندار و واگرا است.

۲) غیر یکنوا، کراندار و همگرا است.

۳) یکنوا، بدون کران و واگرا است.

۴) غیر یکنوا، بدون کران و واگرا است.

**۳۴- دنبالهٔ $u_n = (1+\frac{1}{n})^n \ldots$

۱) صعودی ، دارای کران بالایی ، همگرا است.

۲) نزولی ، دارای کران پایینی ، همگرا است.

۳) صعودی ، دارای کران بالایی ، واگرا است.

۴) نزولی ، دارای کران بالایی ، واگرا است.

**۳۵- مجموع سری $\frac{3}{(10)^1} + \frac{3}{(10)^2} + \frac{3}{(10)^3} + \ldots + \frac{3}{(10)^n} + \ldots$ مساوی است با:

۱) $\frac{3}{10}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{n}$

**۳۶- مجموع سری $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{2^{k-1}}$ برابر است با:

۱) ۴ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۳۷- دنبالهٔ $a_n=(\frac{۱}{۳})^n$ همگرا است یا واگرا، جملهٔ سوم آن برابر است با:

۱) همگرا به صفر، $\frac{۱}{۲۷}$ ۲) همگرا به صفر، $-\frac{۱}{۶}$

۳) واگرا به صفر، $\frac{۲}{۳}$ ۴) واگرا به صفر، $-\frac{۱}{۳}$

۳۸- حاصل $\lim_{n\to+\infty}\frac{ln(۲n+۵)}{n}$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۰ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۳۹- اگر $a\geq ۱>۰$ باشد آنگاه $\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{۱}{n}}$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $۳^{۱/۳}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt[۵]{۱۱}$

۴۰- کدامیک از دنباله‌های زیر نزولی است؟

۱) $u_n=\frac{n}{n+۵}$ ۲) $u_n=\frac{n+۱۲}{n+۵}$

۳) $u_n=-\frac{۱}{(۱+\frac{۱}{n})^n}$ ۴) $u_n=\frac{n^۲}{۱+n^۲}$

۴۱- دنبالهٔ $\{u_n\}$ را از بالا (سمت راست) کراندار می‌نامند اگر یک عدد حقیقی M موجود باشد بطوریکه به ازای هر $n\in N$ ، ... باشد.

۱) $u_n>M$ ۲) $u_n<M$

۳) $u_n=M$ ۴) $u_n=۰$

۴۲- فرض می‌کنیم $a>۱$، در این صورت $\lim_{n\to+\infty} a^{۱/n}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) صفر

۴۳- اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ کراندار و دنبالهٔ $\{b_n\}$ به صفر همگرا باشد آنگاه دنبالهٔ $\{a_nb_n\}$:

۱) به صفر همگرا است ۲) به صفر واگرا است

۳) به بی‌نهایت همگرا است ۴) به بی‌نهایت واگرا است

۴۴- اگر $x>0$ و (n عددی طبیعی باشد)، آنگاه

۱) $(1+x)^n \leq 1$ ۲) $(1+x)^n \geq 1$

۳) $(1+x)^n > 1$ ۴) $(1+x)^n < 1$

♣ ۴۵- اگر $a>1$ ، $a_n=a^n$ آنگاه $\lim_{n\to+\infty} a_n$ برابر است با:

۱) $\pm\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) صفر ۴) $-\infty$

۴۶- حاصل $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$ (که در آن n یک عدد طبیعی است) برابر است با:

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) صفر ۴) حد ندارد.

۴۷- حاصل $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n}$ برابر است با:

۱) صفر ۲) -1 ۳) $+1$ ۴) $+\infty$

♣ ۴۸- گزینه صحیح در مورد دنبالهٔ $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ کدام است؟

۱) نزولی و غیر یکنوا و دارای کران بالایی است.

۲) صعودی و غیر یکنوا و دارای کران پایینی است.

۳) نزولی و یکنوا و دارای کران بالایی است.

۴) صعودی و یکنوا و دارای کران پایینی است.

♣ ۴۹- گزینهٔ صحیح را در مورد دنبالهٔ $\left\{n^2+\cos\frac{\pi}{n}\right\}$ انتخاب کنید.

۱) یکنوا و صعودی است. ۲) غیر یکنوا و نزولی است.

۳) یکنوا و نزولی است. ۴) غیر یکنوا و صعودی است.

♣ ۵۰- کدام یک از سری‌های زیر واگرا است؟

۱) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ ۲) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}$

۳) $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k+1}{k(k+1)}$ ۴) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$

♣ ۵۱- مقدار سری $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k+4^k}{6^k}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

♣ ۵۲- مقدار سری $\sum_{k=1}^{+\infty} log\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$ برابر است با:

۱) $-log2$ ۲) صفر ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۱

♣ ۵۳- اگر $a>1$ و $a_n=a^{-n}$ آنگاه $\lim_{n\to+\infty} a_n$ برابر است با:

۱) ۱- ۲) صفر ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) ۱

♣ ۵۴- جملهٔ چهارم و ششم دنباله $x_1=1$ و $x_0=1$ و $x_{n+2}=x_n+x_{n+1}$ به ترتیب کدام است ؟

۱) ۵ و ۱۳ ۲) ۱۳ و ۵ ۳) ۸ و ۵ ۴) ۳ و ۸

♣ ۵۵- حد دنباله همگرای $a_n=nsin\frac{1}{n}$ کدام است؟

۱) همگرا به صفر ۲) همگرا به ۱

۳) همگرا به $\frac{1}{2}$ ۴) همگرا به ۱-

♣ ۵۶- مجموع سری $\sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{5}{2^k}+\frac{1}{3^k})$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) ۶/۵ ۳) ۵/۵ ۴) $\frac{26}{11}$

۵۷- در سری $0/222... = \frac{2}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{100}+...$ با جملهٔ اول $a=\frac{2}{10}$ و قدر نسبت $r=\frac{1}{10}$ ، حد مجموع برابر است با:

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) ۰/۵ ۳) $\frac{2}{9}$ ۴) $\frac{7}{3}$

♣ ۵۸- حد دنبالهٔ $\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{2n+1}{n}\right\}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۴

۵۹- حد دنبالهٔ $\left\{(۲+\frac{۱}{۱۰^n})^۲\right\}$ کدام یک است؟

۱) ۲ ۲۰) ۸ ۳) ۴ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۶۰- دو دنباله با جملات عمومی $a_n=(-۱)^n$ و $b_n=(-۱)^{n+۱}$ مفروض‌اند تعیین کنید کدامیک از دنباله‌های زیر واگرا است؟

۱) $\{a_nb_n\}$ ۲) $\{\frac{a_n}{b_n}\}$

۳) $\{a_n-b_n\}$ ۴) $\{a_n+b_n\}$

۶۱- اگر $\{b_n\}=\{۱,-۱,۱,-۱,...\}$ و $\{a_nb_n\}=\{-۱,-۱,-۱,-۱,...\}$ آنگاه $\{a_n\}$ کدام است؟

۱) $\{a_n\}=\{۱,-۱,۱,-۱,...\}$ ۲) $\{a_n\}=\{۱,۱,-۱,-۱,...\}$

۳) $\{a_n\}=\{۱,-۱,۱,۱,...\}$ ۴) $\{a_n\}=\{-۱,۱,-۱,۱,...\}$

۶۲- هرگاه سری $\sum_{k=۱}^{+\infty} a_k$ همگرا باشد آنگاه:

۱) a_n به سمت یک میل می‌کند.

۲) a_n به سمت صفر میل می‌کند.

۳) a_n به سمت منفی یک میل می‌کند.

۴) a_n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

۶۳- حد مجموع سری $\sum_{k=۱}^{+\infty}\frac{۱}{۲^{k-۱}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۶۴- اگر در دنبالهٔ $\{a_n\}$ و $a_n>۰$ و $\lim_{n\to+\infty} a_n=L$ آنگاه:

۱) $L\leq ۰$ ۲) $L=۰$ ۳) $L>۰$ ۴) $L\geq ۰$

♣ ۶۵- اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ به L همگرا و c عددی ثابت باشد حاصل $\lim_{n\to+\infty} ca_n$ کدام است؟

۱) L ۲) c ۳) cL ۴) صفر

♣ ۶۶- اگر $a_n=\frac{۱}{n^۲}$ و $b_n=۲n$ باشد آنگاه $\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{n}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۲}{n}$ ۴) $+\infty$

♣ ۶۷- اگر $b_n=۲n$ و $c_n=\frac{۱-۲n^۲}{n}$ ، آنگاه $\lim_{n\to+\infty}(b_n+c_n)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $\frac{۲}{n}$ ۴) $\frac{۱}{n}$

♣ ۶۸- اگر $\lim_{n\to+\infty} a_n=۰$ آنگاه $\lim_{n\to+\infty} a_n^۲$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ∞ ۳) صفر ۴) هیچکدام

♣ ۶۹- مقدار سری $\sum_{n=۱}^{+\infty} log\frac{n(n+۲)}{(n+۱)}$ کدام است؟

۱) $log۲$ ۲) $log\frac{۲}{۳}$

۳) $log۳$ ۴) غیر قابل محاسبه

♣ ۷۰- حد دنباله $\left\{\frac{۲+۵^n}{۷+۵^{n-۱}}\right\}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۷}$

♣ ۷۱- حاصل $\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{۳^n+۵^n}{۱۵^n}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۱۵}$ ۴) $\frac{۸}{۱۵}$

**۷۲- کدام سری برابر ۰/۷۱۷۱۷۱۷۱... است

۱) $\sum_{n=1}^{+\infty} (۳۶)^{1/n}$ ۲) $\sum_{n=1}^{+\infty} (۰/۷۱)^n$

۳) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{۷۱}{۱۰^{۲n}}$ ۴) $\sum_{n=1}^{+\infty} ۰/۷۱$

**۷۳- در آزمون قبل حاصل سری چقدر است؟

۱) $\frac{۷۱}{۱۰۰}$ ۲) $\frac{۷۱}{۹۹}$ ۳) $\frac{۷۱}{۱۰۱}$ ۴) $\frac{۷۴}{۹۹}$

**۷۴- کدام دنباله همگراست؟

۱) $\{\sqrt{n}-۳\}$ ۲) $\{n^{(-۱)^n}\}$

۳) $\{\frac{۱۱+(-۱)^n}{n}\}$ ۴) $\{\frac{\sqrt{n}+n^۲}{n\sqrt{n}}\}$

**۷۵- حد دنباله $\{\frac{sin^۲n+۳n^۲}{n^۲}\}$ کدام است؟

۱) ندارد ۲) ۰ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

**۷۶- کدام دنباله کراندار است؟

۱) $\{n+sin\frac{\pi}{n}\}$ ۲) $\{(۵-\frac{۱}{۵^n})^۵\}$

۳) $a_n=\begin{cases} ۳ & n \text{ فرد} \\ -\frac{n}{۳} & n \text{ زوج} \end{cases}$ ۴) $\{۱-(\frac{۳}{۲})^n\}$

**۷۷- حد دنباله $\{\frac{n^۲}{۲n+۱}sin\frac{\pi}{n}\}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{\pi}$ ۴) ۰

فصل دوم: ۵۵ تست از حد و پیوستگی

۷۸- کدام گزینه برای $\lim_{x\to\pi} [x^{۲}]$ صحیح است؟

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ندارد

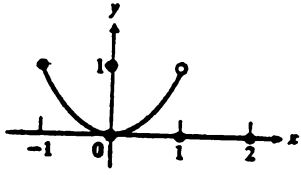
۷۹- کدام گزینه حاصل $\lim_{x\to۱^{+}} \frac{x^{۲}-۱}{(x-۱)^{۲}}$ است؟

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) ۰ ۴) ۲

۸۰- حاصل $\lim_{x\to۰^{-}} \frac{\sqrt{۱-[\cos x]}}{|x|}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۰ ۴) وجود ندارد

۸۱- در شکل مقابل گزینهٔ صحیح کدام است؟



۱) $\lim_{x\to۱} f(x)=۲$

۲) $\lim_{x\to۲} f(x)=۰$

۳) $\lim_{x\to۰} f(x)=۰$

۴) f در $x=۱$ پیوسته است.

♣ ۸۲- حاصل $\lim_{n\to+\infty} \frac{۱}{n}(cos\frac{۱}{n}+cos\frac{۲}{n}+\ldots+cos\frac{n}{n})$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $cos۱$

۳) $۱-sin۱$ ۴) $sin۱$

۸۳- حاصل $\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt[۵]{۱+۳x}-\sqrt[۷]{۱+۵x}}{x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳۵}$ ۲) $\frac{۴}{۳۵}$ ۳) $-\frac{۵}{۴۰}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۸۴- حاصل $\lim_{x\to۰} x^۲sin\frac{۱}{x^۳}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ندارد

♣ ۸۵- حاصل $\lim_{h\to۰}\frac{e^h-(۱+h)}{h^۲}$ برابر است با:

۱) ∞ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

♣ ۸۶- حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲+e^x}{x+e^x}$ برابر است با:

۱) $+\infty$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۸۷- حاصل $\lim_{x\to+\infty} ۲^{-x}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۱- ۴) ۰

♣ ۸۸- حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{log_۲x}{lnx}$ کدام است؟

۱) $ln۲$ ۲) $۲ln۲$

۳) $\frac{۱}{ln۲}$ ۴) $\frac{۲}{ln۲}$

♣ ۸۹- حاصل $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_{\sqrt{10}} x}{\log_{\sqrt{2}} x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\ln\sqrt{10}}{\ln 2}$ ۲) $\frac{\ln\sqrt{2}}{\ln\sqrt{10}}$

۳) $\frac{\log_{10}\sqrt{2}}{\log_{10}\sqrt{10}}$ ۴) $\frac{\log\sqrt{10}}{\log\sqrt{2}}$

۹۰- حاصل $\lim_{x\to e} e^x$ کدام است؟

۱) $\sqrt{e}$ ۲) e^2 ۳) $\ln e$ ۴) e^e

♣ ۹۱- حاصل $\lim_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) e ۴) ∞

♣ ۹۲- حاصل $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) ۰ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۹۳- حاصل $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log_2 x}{\log_8 x}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{\ln 2}{\ln 8}$

♣ ۹۴- کدام گزینه برابر $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2}$ است؟

۱) ندارد ۲) $+\infty$ ۳) ۱ ۴) ۰

♣ ۹۵- حاصل $\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $e^{-1/2}$ ۲) $x^{-1/2}$ ۳) e^2 ۴) ندارد

♣ ۹۶- حاصل $\lim_{x\to 0} (\sin x)^{1/x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۲ ۴) ندارد

♣ ۹۷- حاصل $\lim_{x\to 0^+} x^x$ کدام است؟

۱) e ۲) e^2 ۳) ۱ ۴) $\sqrt{e}$

♣ ۹۸- حاصل $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\cot x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $+\infty$ ۴) ندارد

♣ ۹۹- حاصل $\lim_{x\to 0^+} (x)^{\frac{1}{x^n}}$ کدام است؟ $(n\geq 2)$

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) $+\infty$

۱۰۰- مقدار $\lim_{x\to \pi/2^+} \frac{5}{3+2^{\tan x}}$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

♣ ۱۰۱- حاصل $\lim_{x\to 0^+} \ln x$ برابر است با:

۱) $+\infty$ ۲) ۱ ۳) $-\infty$ ۴) ۰

♣ ۱۰۲- حاصل $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) هیچکدام

♣ ۱۰۳- مقدار $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{x}$ برابر است با:

۱) $\ln a$ ۲) $\frac{1}{\ln a}$ ۳) a ۴) $-a$

♣ ۱۰۴- اگر $m\in N$ حاصل $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^m}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۰ ۴) 0^+

♣ ۱۰۵- اگر $m\in N$ حاصل $\lim_{x\to -\infty} x^m e^x$ برابر است با :

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) ۰ ۴) $+1$

*۱۰۶- مقدار $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-۲}\right)^x$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) ۱ ۳) $e^۲$ ۴) تعریف نشده

*۱۰۷- حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{۳^x-۵}{۴(۳^x+۲)}$ برابر می شود با:

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۰۸- حاصل $\lim_{x\to-\infty}\frac{۳^x-۵}{۴(۳^x+۲)}$ برابر می شود با:

۱) $\frac{-۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۸}{۵}$ ۳) $\frac{-۵}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

*۱۰۹- حاصل $\lim_{x\to۰^+}(e^{۲/x}+e^{x/۲})$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) $+\infty$ ۳) $-\infty$ ۴) ۱

*۱۱۰- اگر $a>۰$ مقدار $\lim_{x\to۰}\frac{a^x-۱}{x}$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) $+\infty$ ۳) lna ۴) $-\infty$

*۱۱۱- حاصل $\lim_{x\to۰^-}(e^{-۲/x}+e^{x^۲})$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) $+\infty$ ۳) $-\infty$ ۴) ۱

*۱۱۲- مقدار $\lim_{x\to۰^+} xlnx$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۰ ۴) ۱

*۱۱۳- هر گاه x به سمت ۱ میل کند تابع $y=\frac{۱}{lnx}-\frac{۱}{x-۱}$ به چه عددی میل خواهد کرد؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $+\infty$

*۱۱۴- حاصل $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{۳x^۲+x+۱}{۴x^۲-۳x-۲}\right)^x$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $+\infty$ ۳) $-\infty$ ۴) ۱

♣ ۱۱۵- اگر x مثبت بوده و به سمت صفر میل کند تابع $y=lnx+x^{۲}$ به چه عددی میل می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

۱۱۶- اگر هنگامی که x به سمت ۰ میل می‌کند $f(x)$ به سمت ۱- میل کند و تابع g با ضابطه $g(x)=\frac{f(x)-۱}{f(x)+۱}$ تعریف شده باشد حاصل $\lim_{x\to ۰} g(x)$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$

۳) $+\infty$ یا $-\infty$ ۴) هیچکدام

♣ ۱۱۷- مقدار $\left(\frac{(۲x-۱)^{۳}}{x^{۳}-۱}\right)^{\frac{x-۱}{۲x+۱}}$ $\lim_{x\to+\infty}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۸

♣ ۱۱۸- حاصل $\lim_{x\to \pi/۴} ln(tanx)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۱۱۹- مقدار $(-۱)^{[x+۳]}\frac{x^{۳}-۸}{(x-۴)^{۲}}$ $\lim_{x\to ۵}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱۱۷

۳) ۱۱۷- ۴) وجود ندارد.

♣ ۱۲۰- حاصل $\lim_{n\to+\infty} \frac{۱}{n}\left(\frac{n^{۲}}{۱^{۲}+n^{۲}}+\frac{n^{۲}}{۲^{۲}+n^{۲}}+\ldots+\frac{n^{۲}}{n^{۲}+n^{۲}}\right)$

۱) $tan^{-۱}۱$ ۲) $tan^{-۱}۲$

۳) ۱ ۴) ۰

۱۲۱- مقدار $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{۳}{۲n+n}+\frac{۳}{۲n+۲}+\ldots+\frac{۳}{۲n+۱}\right)$ برابر است با:

۱) $۳ln\frac{۲}{۳}$ ۲) $۳ln\frac{۳}{۲}$ ۳) $۳ln۳$ ۴) $۲ln۲-۱$

۱۲۲- حاصل $\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}\left(\frac{n}{n}+\frac{n+۱}{n}+\frac{n+۲}{n}+\ldots+\frac{۲n}{n}\right)$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۳- حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-[x]}{\sqrt[۵]{x}}$ برابر است با

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۰ ۴) ۱

۱۲۴- حد تابع $f(x)=xe^{۱/x}$ وقتی $x\to+\infty$ برابر است با:

۱) $+\infty$ ۲) ۰ ۳) $-\infty$ ۴) ۱

۱۲۵- حد تابع $f(x)=\frac{e^{x}+e^{-۲x}}{x-e^{-۲x}}$ هنگامی که $x\to+\infty$ برابر است با:

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) ۰ ۴) ۱

۱۲۶- حاصل $\lim_{x\to+\infty}(x^{e}-e^{x})$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۱ ۴) ۰

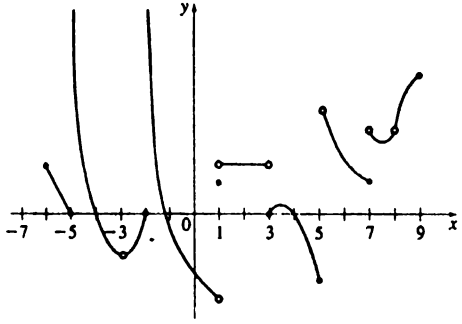
۱۲۷- حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(۱+x)}{\sqrt[۳]{x}}$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) $+\infty$ ۳) ۱ ۴) $-\infty$

۱۲۸- حد تابع $y=\frac{ln(1+x)}{x}$ وقتی $x\to 0$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $+\infty$ ۳) $-\infty$ ۴) ۰

۱۲۹- نمودار تابع f بصورت زیر می‌باشد حاصل کدام گزینه موجود است؟



۱) $\lim_{x\to 1} f(x)$

۲) $\lim_{x\to 5} f(x)$

۳) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$

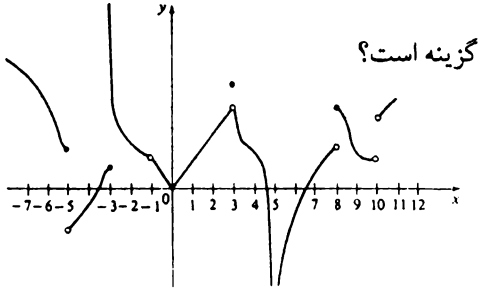
۴) $\lim_{x\to 7} f(x)$

۱۳۰- در تابع آزمون قبل کدام تساوی زیر صحیح است؟

۱) $\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to 3} f(x)$ ۲) $\lim_{x\to -5} f(x)=\lim_{x\to 7} f(x)$

۳) $\lim_{x\to 7} f(x)=\lim_{x\to 8} f(x)$ ۴) $\lim_{x\to -5^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)$

۱۳۱- نمودار تابع g بصورت مقابل است



حاصل $\lim_{x\to 3} g(x)$ کدام گزینه است؟

۱) ۴

۲) ۵

۳) موجود نیست

۴) قابل محاسبه‌نیست

۱۳۲- در آزمون قبل کدام رابطه درست است؟

۱) $\lim_{x\to 10} g(x) > \lim_{x\to 8} g(x)$ ۲) $\lim_{x\to 2^+} g(x)=\lim_{x\to 3^+} g(x)$

۳) $\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^-} g(x)$ ۴) $\lim_{x\to -1^+} g(x)=\lim_{x\to 3} g(x)$

۷۷آزمون‌ازمشتق

۱۳۳- مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x^{۲}-۱)(x^{۴}+۱)(x^{۸}+۱)(x^{۱۶}+۱)$ در نقطه‌ای به طول $x=۲$ برابر است با:

۱) $\frac{۱۹\times۲^{۳۲}+۴}{۲۵}$ ۲) $\frac{۱۹\times۲^{۳۲}+۴}{۲۵}$

۳) $\frac{۱۱\times۲^{۳۰}+۴}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۲\times۲^{۳۶}+۴}{۲۵}$

۱۳۴- مقدار مشتق مرتبهٔ پانزدهم تابع $y=\frac{۱}{۲^{۱۱}}cosxcos\frac{x}{۲}cos\frac{x}{۴}sin\frac{x}{۴}$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{-\pi}{۱۲}$ چقدر است؟

۱) $-\sqrt{۳}$ ۲) -۱ ۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۳۵- مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[۷]{۱۴x+\sqrt[۵]{(۷x^{۲}-۳۲)^{۲}}}$ در نقطه‌ای به طول $x=۰$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt[۷]{۴}}{۷}$ ۲) $\frac{\sqrt[۷]{۴}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt[۷]{۱۶}}{۷}$ ۴) $\frac{\sqrt[۷]{۸}}{۲}$

۱۳۶- فرض کنید که $f(x)=(x-۱)(۲x-۱)(۳x-۱)...(۱۰۰x-۱)$ در این صورت $f'(۱)f(-۱)$ کدام است؟ ($n!=۱\times۲\times۳\times...\times n$)

۱) $-(۹۹!)(۱۰۱!)$ ۲) $(۱۰۱!)(۹۹!)$

۳) $(۹۹!)(۱۰۰!)$ ۴) ۰

۱۳۷- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=(m+1)cos(\frac{\pi}{3}-x)$ اگر $f'(\frac{-\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$، m کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 0 ۴) 1

۱۳۸- در تابع با ضابطهٔ پارامتری $\begin{cases} x=tan3\alpha-3 \\ y=2sin3\alpha+3 \end{cases}$ ، y'_x کدام است؟

۱) $2sin^3 3\alpha$ ۲) $2tag^3 3\alpha$

۳) $2cos^3 3\alpha$ ۴) $2cot^3 3\alpha$

۱۳۹- اگر $x^2+y^2+3xy-x+y=2$ باشد، مشتق y نسبت به x کدام است؟

۱) $\frac{2x+3y-1}{2x+3y+1}$ ۲) $\frac{1-2x-3y}{2x+3y+1}$

۳) $\frac{1-2x-3y}{3x+2y+1}$ ۴) $\frac{2x+3y-1}{3x+2y+1}$

۱۴۰- اگر $f(x)$ مشتق‌پذیر باشد، مشتق $f(x^{77}+76)$ کدام است؟

۱) $77x^{76}f'(x^{77}+77)$ ۲) $77x^{76}f'(x^{76}+76)$

۳) $77x^{76}f'(x^{76}+77)$ ۴) $77x^{76}f(x^{76}+76)$

۱۴۱- اگر $y=3u^3+u^2-1$ و $u=sin^2 3x$ ، مقدار مشتق y بر حسب x در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{3}$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) -1 ۴) 0

۱۴۲- اگر $(fog)(x)=2x^3$ و $f(x)=3x^5$، آنگاه $g'(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt[5]{162}}{5}$ ۲) $\frac{\sqrt[5]{81}}{5}$ ۳) $\frac{3\sqrt[5]{2}}{5}$ ۴) $\frac{2\sqrt[5]{3}}{5}$

♣ ۱۴۳- مشتق $e^{۲x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}e^{۲x}+c$ ۲) $۲e^{x}+c$

۳) $۲e^{۲x}$ ۴) $۲e^{۴x}$

♣ ۱۴۴- حاصل مشتق $e^{x^{۲}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}e^{۲x}$ ۲) $۲e^{x}$ ۳) $۲xe^{x^{۲}}$ ۴) $۴e^{۴x}$

۱۴۵- مشتق $f(x)=\sqrt{sinx+\sqrt{sinx+\sqrt{sinx+...}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{cosx}{۲y-۱}$ ۲) $\frac{cos^{۲}x}{sin^{۲}x-۱}$

۳) $\frac{sinx}{۳y-۲}$ ۴) $\frac{cos^{۲}x}{۳y-۲}$

۱۴۶- اگر $y=۲u^{۲}-u$ و $u=sin۲x$ ، $y'(x)$ را در $x=\frac{\pi}{۶}$ بدست آورید؟

۱) $۲\sqrt{۳}-۱$ ۲) $۱-۳\sqrt{۲}$ ۳) $۳-\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$

۱۴۷- اگر $F(sinx)=g(x)$ و $g'(\pi)=۲$ ، مطلوبست $F'(۰)$

۱) ۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) -۲

۱۴۸- اگر $F(x)=g(۱-۱x^{۲})$ و $F''(۰)=۴$، مطلوبست $g'(۱)$

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۲

۱۴۹- معادلهٔ خط مماس بر منحنی c با معادلات $y=asin^{۳}t$ ، $x=acos^{۳}t$ به ازای $t=\frac{\pi}{۴}$ چیست؟

۱) $y=x-a\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $y=a\frac{\sqrt{۲}}{۳}+\frac{x}{۲}$

۳) $y=۲x+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $y=-x+a\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۵۰- تابع $y=\frac{x+۲m}{x^۲-mx-۲}$ مفروض است، mکدام باشد تا max تابع ۹ برابر min آن باشد.

۱) $-\infty$ و ∞ ۲) ۱- و ۱

۳) ۲- و ۲ ۴) ۱ و ۰

۱۵۱- معادلهٔ خط مماس بر منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[۵]{x^۳+۱}$ در نقطهٔ تقاطع خط $y+x+۱=۰$ با محور طولها کدام است؟

۱) $x=-۱$ ۲) $x=۰$

۳) $y=-۱$ ۴) $y=۰$

۱۵۲- تابع با ضابطهٔ مفروض $y=-x^۳+mx^۲-۲۷x-۵$ به ازای چه مقادیری از m همواره نزولی است؟

۱) $m\leq ۹$ ۲) $-۹\leq m\leq ۹$

۳) $m\geq ۹$ یا $m\leq -۹$ ۴) $m\leq -۹$

۱۵۳- خط قائم بر منحنی به معادلهٔ $f(x)=x^۳+x^{-۳}$ در نقطه‌ای به طول $x=-۱$ با کدام یک از خطوط زیر موازی است؟

۱) محور xها ۲) نیمساز ربع اول و سوم

۳) محور yها ۴) نیمساز ربع دوم و چهارم

۱۵۴- به ازای چه مقادیری از m تابع با ضابطهٔ مفروض $y=\frac{mx-۲}{m-۲x}$ همواره صعودی است؟

۱) $m>۲$ ۲) $m<-۲$

۳) $m>۲$ یا $m<-۲$ ۴) $-۲<m<۲$

۱۵۵- ضریب زاویهٔ خط قائم بر منحنی به معادلهٔ $x^۲+xy+y^۲=۱$ در نقطه‌ای به طول ۱ و واقع در ربع چهارم برابر است با:

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۰ ۴) ۱

۱۵۶- تابع با ضابطهٔ مفروض $y=۲x^۴-۲x^۳+m^۲x^۲-۶$ دارای سه اکسترمم (ماکزیمم یا می‌نیمم) است. حدود m کدام است؟

۱) $m<\frac{۳}{۴}$ ۲) $m>\frac{-۳}{۴}$

۳) $m>\frac{۳}{۴}$ یا $m<\frac{-۳}{۴}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}<m<\frac{۳}{۴}$

۱۵۷- معادلهٔ خط قائم بر منحنی نمایش تابع با معادلات پارامتری $(x=۲sin\alpha-۳\ ,\ y=۲cos\alpha+۲)$ در نقطه‌ای از آن‌که $\alpha=\frac{\pi}{۲}$ باشد، کدام است؟

۱) $x=-۱$ ۲) $x=۲$

۳) $y=-۱$ ۴) $y=۲$

۱۵۸- تابع با ضابطهٔ $y=۷-۳\ secx$ در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ چند نقطهٔ اکسترمم (ماکزیمم یا می‌نیمم) دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۹- در تابع $y=(۶x+۴)^۳+۲$ نقطهٔ $A(\frac{-۲}{۳},۲)$، چه نقطه‌ای است؟

۱) ماکزیمم ۲) می‌نیمم

۳) مرکز تقارن ۴) نقطهٔ عادی

۱۶۰- به ازای کدام p خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=x^۳+px+۳$ در نقطه‌ای به طول ۲- بر خط $۳y+۲x+۱=۰$ عمود است؟

۱) $-\frac{۱۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۱۷}{۲}$ ۳) $-\frac{۲۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۲۷}{۲}$

۱۶۱- بر منحنی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-5x-4$ خطی در نقطه‌ای به طول ۱- مماس شده است. فاصلهٔ نقطهٔ $A(1,-12)$ از این خط مماس کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۶۲- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=(2x+6)^4+5$ نقطهٔ $M(-3,5)$ چه نقطه‌ای است؟

۱) ماکزیمم ۲) می‌نیمم

۳) مرکز تقارن ۴) نقطهٔ عادی

۱۶۳- اگر $A(-2,2)$ نقطهٔ اکسترمم (ماکزیمم یا می‌نیمم) تابع با ضابطهٔ مفروض $f(x)=x^3+px^2+qx+4$ باشد، مقدار $p+q$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) $\frac{7}{4}$ ۳) $\frac{21}{2}$ ۴) $\frac{21}{4}$

۱۶۴- تابع با ضابطهٔ $y=x^2+3x+4$ در فاصله‌های $[-2,-3]$ و $[-1,4]$ به ترتیب چگونه است؟

۱) صعودی- نزولی ۲)نزولی- صعودی

۳) صعودی- صعودی ۴)نزولی-نزولی

۱۶۵- نزدیکترین فاصلهٔ منحنی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-1$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۶۶- اگر $x\in[1,5]$، برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-6x+9$ کدام است؟

۱) $[1, 4]$ ۲) $[0,4]$

۳) $[4,25]$ ۴) $[0,25]$

۱۶۷- ضریب زاویهٔ خط قائم بر منحنی تابع با ضابطهٔ $y=-x^۳+۳x^۲-۱$ در نقطهٔ عطفش کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۶۸- اگر تابع با ضابطهٔ مفروض $y=(m-۱)x^۲+mx+۲$ در نقطه‌ای به طول $x=-۲$ می‌نیمم باشد. مقدار m کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۶۹- تابع با ضابطهٔ مفروض $f(x)=k\ sinx+s\ cos۲x$ دارای نقطهٔ عطفی با طول $x=\frac{\pi}{۲}$ واقع بر نیمساز ربع اول و سوم است، مقدار $k-s$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $-\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $-\pi$

۱۷۰- عرض نقطهٔ می‌نیمم تابع با ضابطهٔ مفروض $y=x^۲-۳x+m$ برابر $-\frac{۱}{۴}$ است ، مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

۱۷۱- به ازای کدام مقدار m منحنی به معادلهٔ مفروض $y=x^۲-mx+m-۱$ بر محور xها مماس است.

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۷۲- به ازای کدام مقدار m طول وسط پاره خط واصل بین نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع با ضابطهٔ مفروض $y=x^۳+۳mx^۲+۳m^۲x+۱$ برابر ۴ می‌باشد؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۱۷۳- اگر محیط یک مستطیل ۲۴ باشد، ماکزیمم مساحت آن چقدر است؟

۱) ۳۴ ۲) ۳۶ ۳) ۳۸ ۴) ۴۰

۱۷۴- اگر ماکزیمم تابع با ضابطهٔ مفروض $f(x)=۲x^۳-۳px^۲$ برابر ۸ باشد، مقدار p کدام است؟

۱) ۰ ۲) -۲ ۳) -۴ ۴) -۸

۱۷۵- تعداد جوابهای حقیقی معادلهٔ $۲x^۴+۳x^۳+۶x^۲+۵x=۰$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۶- نمودار تغییرات تابع با ضابطهٔ مفروض $y=(۱-m)x^۳+mx$ همواره از چند نقطهٔ ثابت می‌گذرد؟

۱) از نقطهٔ ثابتی نمی‌گذرد. ۲) یک نقطه.

۳) دو نقطه. ۴) سه نقطه.

۱۷۷- فاصلهٔ نقطه عطف منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x)=-\frac{۲}{۳}x^۳+۲x^۲-۱$ از نیمساز ربع دوم و چهارم کدام است؟

۱) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$

۳) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۷۸- اگر نقطهٔ $M(-۱,-۲)$ نقطهٔ عطف منحنی با ضابطهٔ مفروض $f(x)=x^۳+px^۲+q$ باشد. مقدار pq کدام است؟

۱) -۶۴ ۲) -۳۲ ۳) -۱۲ ۴) -۶

۱۷۹- معادلهٔ $(x-۱)^۳+(x-۲)^۳+(x-۳)^۳+\ldots+(x-۷۶)^۳=۰$ دارای چند جواب حقیقی است؟

۱) سه جواب حقیقی ۲) دو جواب حقیقی

۳) یک جواب حقیقی ۴) جواب حقیقی نداد.

۱۸۰- تابع با ضابطهٔ $y=x^۳+x^۲-۵x+۳$ در فواصل $]-۱,۱[$ و $[\frac{۴}{۳},\frac{۵}{۲}]$ به ترتیب چگونه است؟

۱) صعودی-صعودی ۲) صعودی-نزولی

۳) نزولی-صعودی ۴) نزولی-نزولی

♣ ۱۸۱- اگر $x\in[-\pi,۲\pi]$ ماکزیمم تابع $y=e^{sinx}$ برابر است با:

۱) e ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{e}$ ۴) ۰

♣ ۱۸۲- مقدار ماکزیمم تابع $y=e^x-۲x$ در فاصلهٔ $(۰,۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) e ۳) $-۲+e$ ۴) $۲-۲ln۲$

♣ ۱۸۳- اگر $x\in(۰,۱)$ مقدار مینی‌مم تابع $y=e^x-۲x$ کدام گزینه است ؟

۱) $e-۲$ ۲) e ۳) -۱ ۴) $۲-e$

♣ ۱۸۴- مشتق تابع $y=۳^{sinx}$ کدام است؟

۱) $۳^{sinx}\ cosx$ ۲) $۳^{sinx}\ ln(cosx)$

۳) $(ln۳)۳^{sinx}\ lncosx$ ۴) $۳^{sinx}\ cosxln۳$

♣ ۱۸۵- در تابع $y=a^x$ اگر $a>۱$ و $۰<a<۱$ آنگاه تابع ...

۱) صعودی - صعودی ۲) نزولی - نزولی

۳) صعودی - نزولی ۴) نزولی - صعودی

♣ ۱۸۶- حاصل $\lim\limits_{x\to۰}\frac{۳^{sinx}-۱}{x}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $ln۳$ ۴) ۳

♣ ۱۸۷- مشتق تابع $y=log_{۱۰}(۳x+۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۳x+۱}$ ۲) $\frac{۳ln۳}{(۳x+۱)}$

۳) $\frac{۳}{ln(۳x+۱)}$ ۴) $\frac{۳}{ln۱۰(۳x+۱)}$

♣ ۱۸۸- مشتق تابع $y=x^{۲}.e^{\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $e^{\sqrt{x}}+\frac{x}{۲}e^{\sqrt{x}}$ ۲) $e^{\sqrt{x}}+\frac{x^{۳/۲}}{۲}e^{x}$

۳) $۲e^{\sqrt{x}}+\frac{x^{۳/۲}}{۳}e^{\sqrt{x}}$ ۴) $۲xe^{\sqrt{x}}+\frac{x^{۳/۲}}{۲}e^{\sqrt{x}}$

۱۸۹- مشتق $y=(x-\sqrt{x})^{sin^{-۱}x}$ کدام است ؟

۱) $(x^{۲}-\sqrt{x})cosx^{-۱}$ ۲) $(x-\sqrt{x})^{sin^{-۱}x}\left[\frac{ln(x-\sqrt{x})}{\sqrt{۱-x^{۲}}}+\frac{۲\sqrt{x}-۱}{۲x\sqrt{x}-۲x}sin^{-۱}x\right]$

۳) $(۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x}})sin^{-۱}x$ ۴) $(۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}sin^{-۱}x+\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$

♣ ۱۹۰- در تابع $y=xe^{-x}$ اکسترمم نسبی برابر است با:

۱) $\frac{۲}{e}$ ۲) $\frac{۱}{e}$ ۳) e ۴) $۲e$

♣ ۱۹۱- در تابع $y=xe^{-x}$، نقطهٔ عطف ... است .

۱) $(-۲,-۲e^{۲})$ ۲) $(۰,۰)$ ۳) $(۲,۲e^{-۲})$ ۴) $(۲,e^{-۲})$

♣ ۱۹۲- اگر $y=۳^{x^{۲}}$ باشد، حاصل $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟

۱) $۲(ln۳)x۳^{x^{۲}}$ ۲) $۲(ln۳)۳^{x^{۲}}$

۳) $(ln۳)۳^{x^{۲}}$ ۴) $۳^{x^{۲}}(ln۳)\,x^{۲}$

♣ ۱۹۳- اگر $ye^{x}+xe^{y}+x+y=۰$ ، حاصل $\frac{dy}{dx}$ برابر است با:

۱) $\frac{ye^{x}+e^{y}+y}{e^{x}+xe^{y}}$ ۲) $\frac{-ye^{x}+e^{y}+y}{e^{x}+xe^{y}+x}$

۳) $-\frac{ye^{x}+e^{y}+۱}{e^{x}+xe^{y}+۱}$ ۴) $\frac{ye^{x}+e^{y}+۱}{e^{x}+xe^{y}+۱}$

♣۱۹۴- معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y=lnx$ در نقطه‌ای به طول ۲ کدامست؟

۱) $y=\frac{۱}{۲}x+ln۲-۱$ ۲) $y=\frac{۱}{۲}lnx+ln۲-۱$

۳) $y=\frac{-۱}{۲}x+ln۲+۱$ ۴) $y=\frac{۱}{۲}lnx-ln۲-۱$

♣۱۹۵- شیب خط عمود بر نمودار تابع $y=xlnx$ در نقطهٔ $(e,۱)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۲

♣۱۹۶- اگر $y=e^{۲x+lnx}$ باشد آنگاه $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲+lnx}{۱+lnx}$ ۲) $\frac{۲+x}{۲x+lnx}$

۳) $e^{۲x}+۲xe^{۲x}$ ۴) $e^{۲x}+۲e^{۲x}$

♣۱۹۷- مشتق دوم $y=lnx$ به ازای $x=۱۰$ کدام است؟

۱) $۱۰^{۲}-۱$ ۲) $۱۰^{۲}$

۳) $-۱۰^{۲}$ ۴) $-۱۰^{-۲}$

♣۱۹۸- مشتق تابع $y=x^{x}$ کدام است؟

۱) $x^{x}\ lnx$ ۲) $x^{x}\ (lnx-۱)$

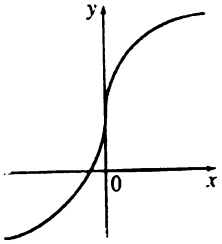
۳) $-x^{x}\ lnx$ ۴) $x^{x}\ (lnx+۱)$

۱۹۹- اگر l خطی گذرنده از مبدأ با شیب منفی باشد چند خط مماس بر نمودار $xy=۱۲$ موازی l می‌توان رسم کرد؟

۱) ۰ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲۰۰- نمودار f به شکل مقابل است.



برای f، حاصل $f'(0)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $-\infty$

۳) $+\infty$ ۴) $\pm\infty$

۲۰۱- برای تابع سؤال قبل برای مقادیر تا صفر x عبارت $f''(x)$ ... است؟

۱) مثبت ۲) ابتدا منفی و سپس مثبت

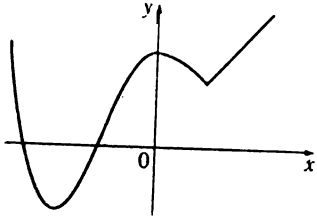
۳) ابتدا مثبت و سپس منفی ۴) منفی

۲۰۲- برای تابع سؤال ۲۰۰ برای $x\neq 0$ حاصل $f'(x)$ ... است؟

۱) منفی ۲) ابتدا منفی و سپس مثبت

۳) ابتدا مثبت و سپس منفی **۴) مثبت**

۲۰۳- نمودار تابع f به شکل مقابل

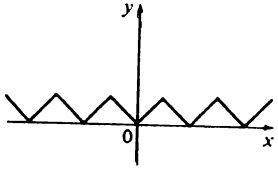


است این تابع چند اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۵

۲۰۴- شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$



است این تابع در $x=0$ ...

۱) مشتق‌پذیر است

۲) ماکزیمم نسبی دارد

۳) مشتق دوم ندارد

۴) هیچکدام

۲۰۵- در تابع سؤال قبل تابع f در چند نقطه مشتق‌پذیر نمی‌باشد؟

۱) ۱ ۲) k ۳) $2k$ ۴) بی‌شمار نقطه

۲۰۶- نردبانی به طول ۲۵ فوت به دیواری قائم تکیه دارد اگر پای نردبان را با آهنگ ۳ فوت بر ثانیه بطور افقی از دیوار دور کنید، وقتی پای آن ۱۵ فوت از دیوار دور شده باشد. سر نردبان با چه تندی به طرف پایین دیوار می‌لغزد؟

۱) $-\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $-\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۲۰۷- اگر $x^۳-x^۲-y^۴+y=۲$ و $D_t y=۱$ حاصل $D_t x$ وقتی $x=۱$ کدامست ؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۲ ۴) -۱

۲۰۸- اگر $۲x+۳y=۸$ و $D_t y=۲$ مطلوبست $D_t x$

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) ۲

۲۰۹- اگر $xy=۲۰$ و $D_t y=۱۰$ مطلوبست $D_t x$ وقتی که $x=۲$

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۲ ۴) -۲

۳۳آزمون از توابع نمایی و لگاریتمی

۲۱۰- دامنهٔ تغییرات تابع $y=\log\frac{۲+۳x}{۳-۲x}$ عبارت است از

۱) $x<-\frac{۲}{۳}$ و $x>\frac{۳}{۲}$ ۲) $x<-\frac{۳}{۲}$ و $x>\frac{۲}{۳}$

۳) $-\frac{۲}{۳}<x<\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}<x<\frac{۲}{۳}$

۲۱۱- دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\sqrt{\log\frac{x-x^۲}{۴}}$ کدام است؟

۱) ϕ ۲) $۰\leq x\leq ۱$

۳) $-۱\leq x\leq ۰$ ۴) R

♣ ۲۱۲- در مورد تابع $y=\ln x$ کدام غلط است؟

۱) پیوسته و یک به یک ۲) دامنهٔ آن اعداد مثبت است

۳) برد آن اعداد حقیقی ۴) پیوسته و نزولی

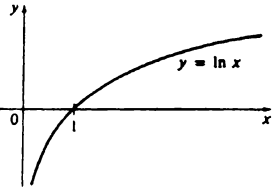
۲۱۳- دامنهٔ تابع $y=a^x$ با شرط $a>۰$, $a\neq ۱$ کدام است؟

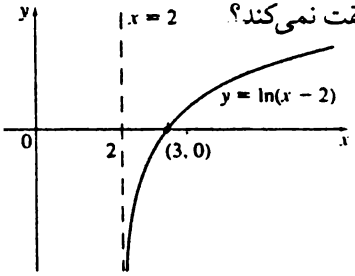
۱) R ۲) $R-\{۱\}$ ۳) R^+ ۴) $R-R^+$

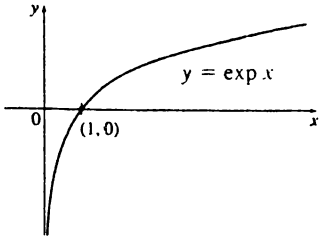
۲۱۴- برد تابع $y=a^x$ با شرط $a>۰$, $a\neq ۱$ کدام است؟

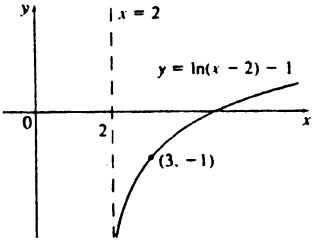
۱) N ۲) $R-\{۰\}$ ۳) R ۴) هیچکدام

۲۱۵* - ضابطهٔ کدام تابع با نمودارش مطابقت نمی‌کند؟

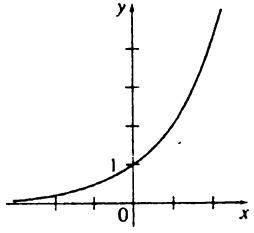
۱) 

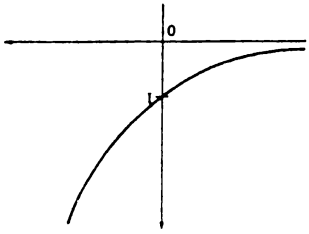
۲) 

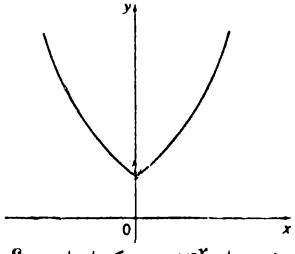
۳) 

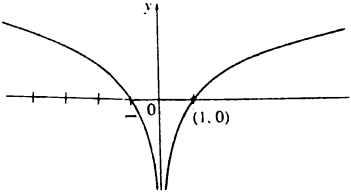
۴) 

۲۱۶* - نمودار $y=ln|x|$ کدام است؟

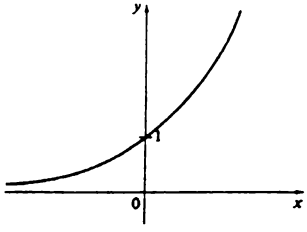
۱) 

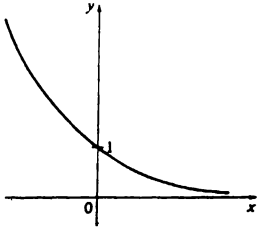
۲) 

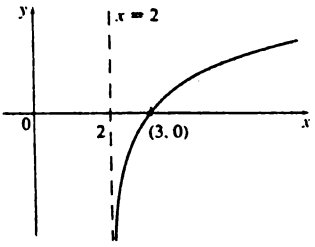
۳) 

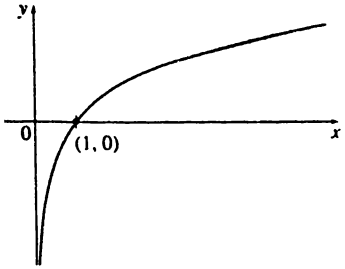
۴) 

۲۱۷ - نمودار $y=۲^{-x}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۱۸- کدام صحیح است؟

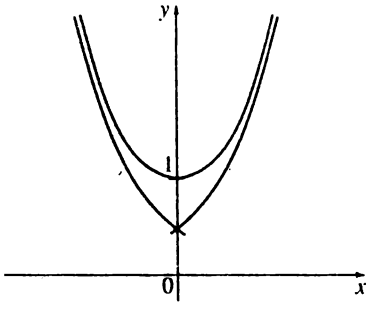
۱) $lne^x=x$ ۲) $e^{lnx}=x$

۳) $۲^{\sqrt{۳}}=e^{\sqrt{۳}lnx}$ ۴) $lne^x=۲x$

۲۱۹- اگر $f(x)=ln|x|$ و $x<۰$ ، تابع معکوس f برابر است با؟

۱) e^x ۲) $-e^x$ ۳) e^{-x} ۴) $-e^{-x}$

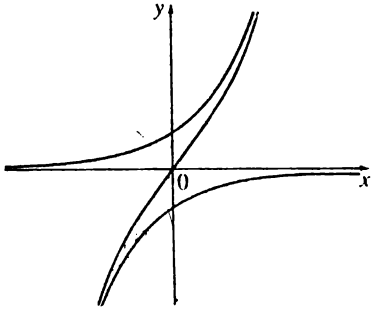
۲۲۰- نمودار مقابل ، ضابطه‌اش کدام است؟



۱) $\frac{e^x+e^{-x}}{۲}$ ۲) e^x-e^{-x}

۳) $\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ ۴) $\frac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

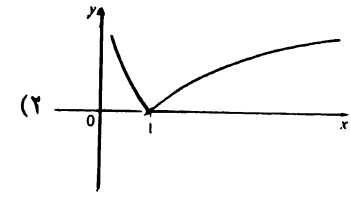
۲۲۱- نمودار مقابل ، ضابطه‌اش کدام است؟

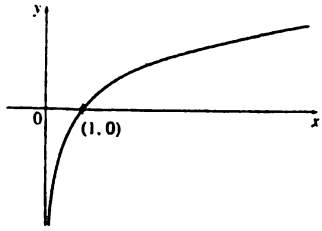


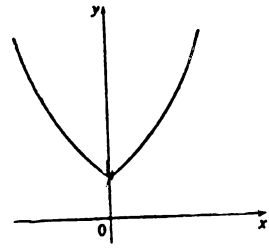
۱) $\frac{۲}{e^x+e^{-x}}$ ۲) $\frac{e^x+e^{-x}}{۲}$

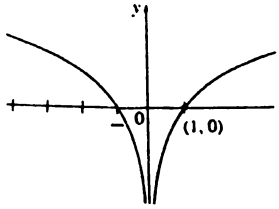
۳) $\frac{e^x-e^{-x}}{۲}$ ۴) $\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

♣ ۲۲۲- نمودار $y=|\ln x|$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


♣ ۲۲۳- حاصل $\int_{-\ln(a+1)}^{0} e^{-x}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{-a}{1+a}$ ۲) $\frac{a}{1+a}$ ۳) a ۴) $-a$

♣ ۲۲۴- مقدار $\ln(\frac{1}{e^x})$ برابر است با

۱) x ۲) e^x ۳) $-x$ ۴) e^{-x}

۲۲۵- ریشه یا ریشه‌های معادلهٔ $\log_9(x+2)-\log_9(x-2)^2=1$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ± 3 ۳) ± 1 ۴) ۱

۲۲۶- مجموعه جواب نامعادله $\log(1-x^2)\leq 0$ برابر است با:

۱) $-1\leq x\leq 1$ ۲) $-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$

۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) R

۲۲۷- معادله $۳^x=۴x$ چند جواب دارد؟

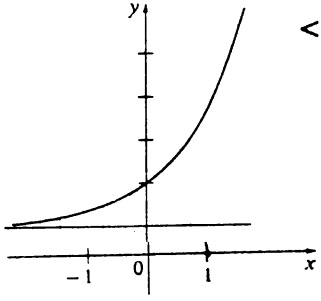
۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲۲۸- مجموعه جواب نا معادله $۵^{x^۲-۵x+۴}<۶۲۵$ کدام است؟

۱) $۰\le x\le ۵$ ۲) $۰<x<۵$

۳) $۱\le x\le ۶$ ۴) <۶

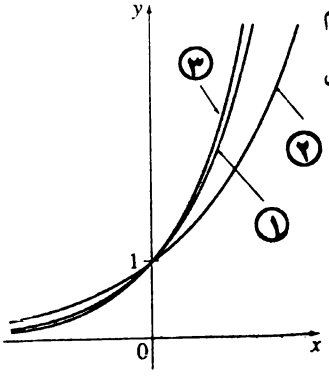
۲۲۹- نمودار مقابل مربوط به کدام تابع است؟



۱) $y=۳^x+۱$ ۲) $y=۳^{-x}-۱$

۳) $y=۲^{-x}-۱$ ۴) $y=۲^x-۱$

۲۳۰- در شکل مقابل نمودار سه تابع رسم شده است کدام گزینه سه تابع را مشخص می‌نماید.



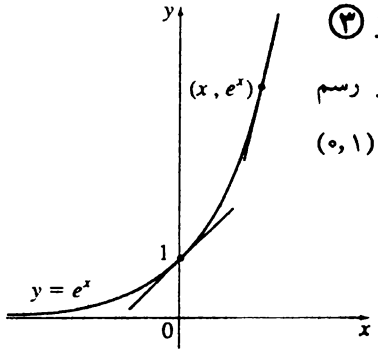
۱) ③ $y=۳^x$ ② $y=۳^x$ ① $y=e^x$

۲) ③ $y=۳^x$ ② $y=e^x$ ① $y=۳^x$

۳) ③ $y=۲^x$ ② $y=e^x$ ① $y=۳^x$

۴) ③ $y=e^x$ ② $y=۳^x$ ① $y=۳^x$

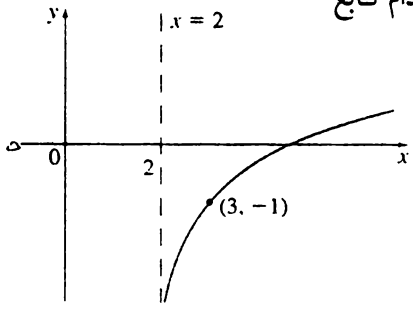
♣ ۲۳۱- در شکل مقابل نمودار $y=e^x$ رسم شده است شیب خط مماس در نقاط $(۰,۱)$ و (x,e^x) بترتیب برابر است با:



۱) e^x , e ۲) e , ۱

۳) e^x , ۱ ۴) ۱ , ۰

۲۳۲- نمودار مقابل مربوط به کدام تابع است؟



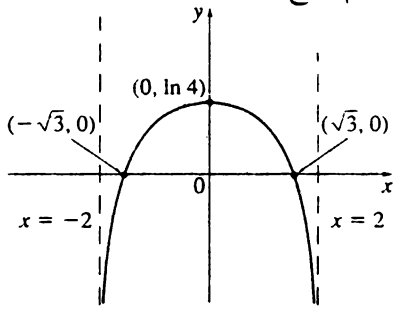
۱) $y=ln(x-۲)-۱$

۲) $y=ln(x-۲)$

۳) $y=ln(x+۲)-۱$

۴) $y=ln(x-۲)+۱$

۲۳۳- نمودار مقابل مربوط به کدام تابع است؟



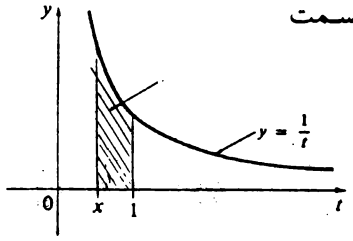
۱) $y=ln(۴-x^۲)$

۲) $y=e^{۴-x^۲}$

۳) $y=ln(x+۲)-۱$

۴) $y=e^{x^۲-۴}$

۲۳۴- در شکل مقابل سطح قسمت هاشور خورده برابر است با:



۱) x

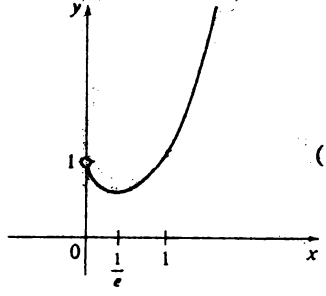
۲) lnx

۳) $-lnx$

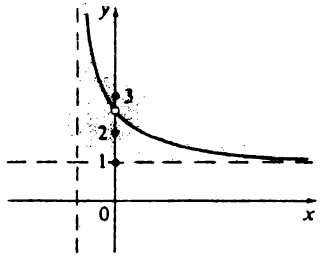
۴) $۱-x$

۲۳۵- نمودار $y=x^x$ برای $x>۰$ کدام است؟

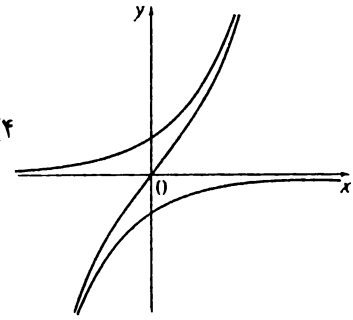
۱)



۲)

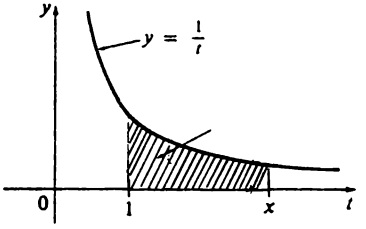


۳)



۴) هیچکدام

۲۳۶- مساحت قسمت هاشور خورده در شکل مقابل برابر است با:



۱) $x-1$ ۲) lnx

۳) $ln(x-1)$ ۴) $-lnx$

۲۳۷- آهنگ افزایش جمعیت شهر معینی متناسب با جمعیت آن شهر است اگر جمعیت در سال ۱۹۳۰، ۵۰۰۰۰ نفر و در سال ۱۹۶۰، ۷۵۰۰۰ نفر بوده باشد، جمعیت مورد انتظار در سال ۱۹۹۰ چند نفر است؟

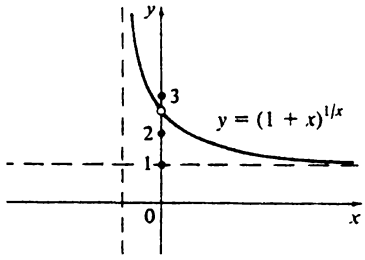
۱) ۵۱۱۲۰۰ ۲) ۱۲۱۵۰۰

۳) ۱۱۲۵۰۰ ۴) ۲۱۱۵۰۰

۲۳۸- اگر نیمه عمر رادیوم ۱۶۹۰ سال باشد، چند درصد از مقدار موجود در زمان حال بعد از ۱۶۹۰ سال باقی خواهد ماند؟

۱) ٪۲۵ ۲) ٪۵ ۳) ٪۵۰ ۴) ٪۷۵

♣ **۲۳۹**- در شکل مقابل نمودار تابع $y=(1+x)^{1/x}$ رسم شده است حاصل $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$



برابر است با:

۱) e ۲) ۱

۳) $-e$ ۴) $-\infty$

♣ **۲۴۰**- با توجه به آزمون قبل حاصل $\lim_{x\to+\infty} y=(1+x)^{1/x}$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $+\infty$ ۳) $-e$ ۴) $-\infty$

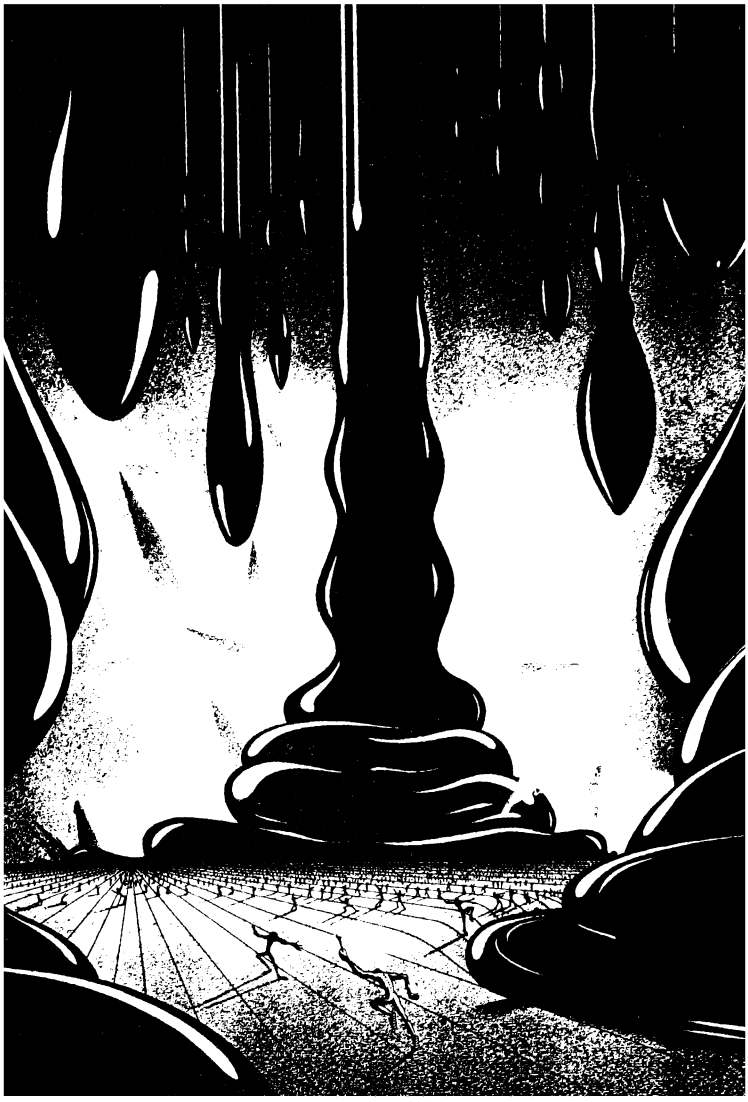
♣ **۲۴۱**- اگر سود بطور پیوسته محاسبه شود ومبلغ سپرده‌ای پس از یک سال دو برابر شود چند سال طول می‌کشد تا سپرده ۴ برابر شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

♣ **۲۴۲**- اگر نرخ سود پرداختی ۸٪ در سال باشد و سود بطور پیوسته محاسبه شود چه مدت طول می‌کشد تا سپرده‌ای e برابر شود؟

۱) ۱۱ سال ۲) ۱۳/۵ سال

۳) ۱۲ سال ۴) ۱۲/۵ سال



۵۵آزمون ازانتگرال

۲۴۳- مقدار $\int ۳x^۲\sqrt{۱+x^۳}\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}(۱+x^۳)^{۳/۲}+c$

۲) $\frac{۴}{۳}(۱+x^۳)^{۳/۲}+c$

۳) $\frac{۳}{۴}(۱+x^۳)^{۳/۲}+c$

۴) $\frac{۳}{۲}(۱+x^۳)^{۳/۲}+c$

♣ ۲۴۴- حاصل $\int (lnx)^۳\frac{dx}{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}(lnx)^۳+c$

۲) $۴(lnx)^۴+c$

۳) $\frac{۱}{۴}(lnx)^۴+c$

۴) $\frac{۱}{۴}(lnx)^۴\frac{۱}{۲}x^{-۲}+c$

۲۴۵- حاصل $\int \frac{cosx}{۱+sin^۲x}dx$ برابر است با:

۱) $tan^{-۱}(cosx)$

۲) $tan^{-۱}(cosx)^۲+c$

۳) $tan^{-۱}(sinx)+c$

۴) $tan^{-۱}(sinx)^۲+c$

♣ ۲۴۶- مقدار $\int x\sqrt{\frac{۱}{x-۱}}\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}(x-۱)\sqrt{x-۱}+۲\sqrt{x}+c$

۲) $\frac{۲}{۳}(x-۱)+۲\sqrt{x-۱}+c$

۳) $\frac{۲}{۳}(x-۱)\sqrt{x-۱}+۲\sqrt{x-۱}+c$

۴) $\frac{۳}{۲}(x-۱)۲\sqrt{x-۱}+\sqrt{x-۱}+c$

۲۴۷- حاصل $\int_{0}^{۲} \sqrt{۴-x^۲}\,dx$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

۲۴۸- حاصل $\int x\cdot cosx\ dx$ برابر است با:

۱) $x.sinx+cosx+c$ ۲) $x.sinx-sinx+c$

۳) $x.cosx+sinx+c$ ۴) $x.sinx+sinx+c$

♣ ۲۴۹- مقدار انتگرال معین $\int_{0}^{۱} ۲e^x\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $۲e$ ۴) $۲e-۲$

۲۵۰- مقدار $\int_{0}^{a} kdx$ کدام است؟

۱) k ۲) a ۳) ka ۴) هیچکدام

♣ ۲۵۱- حاصل $\int_{0}^{۳} e^{x/۳}\,dx$ کدام است؟

۱) $۳e$ ۲) $\frac{۳}{۲}e-۲$ ۳) $\frac{۳}{۲}e-۳$ ۴) $۳e-۳$

۲۵۲- اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲ & ۰\le x\le ۱ \\ ۲-x & ۱<x\le ۲ \end{cases}$ حاصل $\int_{0}^{۲} f(x)dx$ کدامست؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

♣ ۲۵۳- حاصل $\int ۳^{sinx}\,cosx\,dx$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{ln۲}۳^{sinx}+c$ ۲) x^x+c

۳) $x^x(۱+lnx)+c$ ۴) $x^x lnx+c$

♣ ۲۵۴- حاصل $\int_{۱}^{۱} \frac{۱}{t} dt$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $ln۲$ ۴) $ln۲$

♣ ۲۵۵- حاصل عبارت $\int_{۱}^{۲} \frac{۱}{t} dt$ کدام است؟

۱) $۲ln۲$ ۲) ۱ ۳) $۲ln۱$ ۴) $ln۲$

♣ ۲۵۶- حاصل $\int_{e}^{e^{۲}} \frac{۱}{t} dt$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) $ln۲$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{ln۲}$

♣ ۲۵۷- حاصل $\int_{۰}^{۱} \frac{e^x}{۱+e^x} dx$ کدام است؟

۱) $ln\frac{۱+e}{۲}$ ۲) $ln\frac{۱}{۱+e}$

۳) $ln\frac{۱}{e+۲}$ ۴) $ln\frac{۲}{۱+e}$

♣ ۲۵۸- حاصل $\int \frac{log_{۲}x}{ln۲} dx$ کدام است؟

۱) $\frac{(lnx)^{۲}}{۲ln۲}+c$ ۲) $\frac{(lnx)^{۲}}{ln۲}+c$

۳) $\frac{(lnx)^{۲}}{ln۳}+c$ ۴) $\frac{۱}{(ln۲)^{۲}}(xlnx-x)+c$

♣ ۲۵۹- حاصل $\int ۵^x dx$ کدام است؟

۱) -۵^x+c ۲) $\frac{۵^x}{ln۵}+c$

۳) $-۵^x ln۵+c$ ۴) $۵^x ln۵+c$

۲۶۰- حاصل $\int_{۰}^{\sqrt[۴]{π}} x^{۳} sin(x^{۴}) dx$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۲۶۱- سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع با ضابطهٔ $f(x)=۸x^۳-۸x$ و محور xها و دو خط $x=-\frac{۱}{۲}$ و $x=\frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۴}$

۲۶۲- اگر منحنی نمایش تابع اولیهٔ $f(x)=\frac{cotx}{sin^۲x}+\frac{tanx}{cos^۲x}$ محور طولها را در $x=\frac{\pi}{۴}$ قطع کنند، مقدار تابع اولیه در $x=\frac{۳\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۶۳- سطح محصور بین یک طاق منحنی تابع با ضابطهٔ $y=۳sinx-\sqrt{۳}\,cosx$ و محور xها کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۸\sqrt{۳}$

۲۶۴- اگر $\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} sin\frac{kx}{۲}\,dx=\frac{۱}{۲}$ باشد، k چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۶۵- اگر $f(kx+s)=\int ۴f'(kx+۲)dx$، آنگاه واسطهٔ حسابی k و s کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶۶- سطح محصور بین منحنی به معادلهٔ $x^۲+۴y^۲+۱۶y-۲۰=۰$ و محور yها را حول محور yها دوران می‌دهیم، حجم جسم حادث کدام است؟

۱) ۲۴π ۲) ۳۶π ۳) ۷۲π ۴) ۱۴۴π

۲۶۷- حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ و محور xها و دو خط $x=۰$ و $x=۱$ حول محور xها، کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۵}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۵}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۲}$

۲۶۸- اگر $F(x)=\int_{۱}^{x} ۱۱x\sqrt[۵]{x}\,dx$ و $F(۰)=-۵$ آنگاه $F(۱)$ چقدر است؟

۱) ۰ ۲) -۵ ۳) ۱۰ ۴) -۱۰

۲۶۹- سطح محصور بین منحنی به معادلهٔ $y=۴\sin x$ و محور xها و دو خط $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=-\frac{\pi}{۲}$ را حول محور xها دوران می دهیم حجم حادث برابر است با:

۱) $\pi^۲$ ۲) $۲\pi^۲$ ۳) $۴\pi^۲$ ۴) $۸\pi^۲$

♣ ۲۷۰- کدام گزینه برابر $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{i/n}{\sqrt{۱+i^۲/n^۲}}\right)$ است؟

۱) $\sqrt{۲}-۱$ ۲) $\frac{۴}{۵}\sqrt{۳}$

۳) $۳(\sqrt{۲}-۲)$ ۴) $\frac{۵}{۴}\sqrt{۳}$

♣ ۲۷۱- حاصل $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-۱/n}+e^{-۲/n}+\ldots+e^{-n/n}}{n^۲}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $+\infty$ ۳) $-\infty$ ۴) ۱

♣ ۲۷۲- حاصل $\int \ln x\,dx$ برابر است با:

۱) $x\ln x+x+c$ ۲) $x\ln x-x+c$

۳) $x\ln x+c$ ۴) $\frac{x}{\ln x}+c$

♣ ۲۷۳- حاصل $\int_{e}^{e^۲}\frac{dx}{x(\ln x)^۳}$ برابر است با:

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۲۷۴- حاصل $\int_{۰}^{۱}\frac{x^۲}{x+۱}dx$ کدام است؟

۱) $\ln ۲+\frac{۱}{۲}$ ۲) $\ln ۲-\frac{۱}{۲}$

۳) $\ln ۲-۱$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۲۷۵- اگر $f(x)=\int_{0}^{x^2} tsint\,dt$ باشد، $f'(x)$ کدام است؟

۱) $xsinx$ ۲) $2x^2sinx^2$

۳) $2x^3sinx$ ۴) $2x^3sinx^2$

۲۷۶- مقدار تقریبی انتگرال معین $\int_{0}^{3}\frac{dx}{(16+x^2)}$ را با استفاده از قاعدهٔ ذوزنقه‌ای با $n=6$ کدام است؟

۱) ۰/۶۱۰۹ ۲) ۰/۱۶۰۹ ۳) ۰/۹۱۰۶ ۴) ۰/۱۶۹۰

♣ **۲۷۷**- حاصل $\int_{0}^{ln2}\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ برابر است با:

۱) $tan^{-1}x$ ۲) $tan^{-1}2-1$

۳) $tan^{-1}2-\frac{\pi}{6}$ ۴) $tan^{-1}2-\frac{\pi}{4}$

♣ **۲۷۸**- حاصل $\int_{-ln2}^{0}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) $-\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

♣ **۲۷۹**- حاصل $\int_{0}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}+1)$ ۲) $\frac{27}{8}(10\sqrt{10}-1)$

۳) $\frac{27}{8}(10\sqrt{10}+1)$ ۴) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$

♣ **۲۸۰**- حاصل $\int xe^{x^2}dx$ کدام است؟

۱) e^{sinx} ۲) $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

۳) $ln(\sqrt{2}+3)/2$ ۴) e^{x^2}

♣ ۲۸۱- طول قوس منحنی $x^۲+y^۲=۴$ از نقطه $(۲,۰)$ تا $(\sqrt{۲},\sqrt{۲})$ برابر است با:

۱) ۴π ۲) ۲π ۳) π ۴) $\frac{\pi}{۲}$

♣ ۲۸۲- طول قسمتی از منحنی $y=x^{۳/۲}$ واقع بین $x=۲$ و $x=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۲۷}(۱۰\sqrt{۱۰}-۱)$ ۲) $\frac{۴}{۹}(۱۰\sqrt{۱۰}-۱)$

۳) $\frac{۲}{۹}(۵\sqrt{۵}-۱)$ ۴) $\frac{۸}{۲۷}(۵\sqrt{۵}-۱)$

♣ ۲۸۳- مقدار تقریبی $\int_{۰}^{۴} e^x\,dx$ با روش نقطه میانی برای $n=۲$ کدام است؟

۱) $۱+e^۲$ ۲) $e+۲e^۲$

۳) $۲e+۲e^۳$ ۴) $۲e+۳e^۲$

♣ ۲۸۴- در آزمون قبل با روش ذوزنقه‌ای مقدار انتگرال برابر است با:

۱) $۲+۲e^۴+۲e^۹$ ۲) $۱+e^۴+e^۹$

۳) $۲e+۲e^۳$ ۴) $e+e^۳$

♣ ۲۸۵- مقدار تقریبی $\int_{۰}^{۴} e^x\,dx$ با روش ذوزنقه‌ای برای $n=۲$ کدام است؟

۱) $۱+۲e^۴+e^{۱۶}$ ۲) $۱+e^۴+e^۹$

۳) $۲e+۲e^۳$ ۴) $e+e^۳$

♣ ۲۸۶- کران بالای $\int_{۱}^{۴} xe^x dx$ کدام است؟

۱) $۴e^۴$ ۲) $e^{e^۴}$ ۳) $۴e^۸$ ۴) $۱۲e^۴$

۲۸۷- در آزمون قبل کران پایین انتگرال برابر است با:

۱) $-e^{-۳}$ ۲) $e^{-۳}$ ۳) $-\frac{۳}{e}$ ۴) $۳e$

۲۸۸- حاصل $\int_{۱}^{۵}[x]e^{x}dx$ کدام است؟

۱) $e^{۵}-e$ ۲) $۴e^{۵}-e^{۴}-e^{۳}-e^{۲}-e$

۳) $۵e^{۲}-e$ ۴) $e^{۵}-۵e$

۲۸۹- مقدار $\int_{-۱}^{۲}|x|x^{۲}dx$ کدام است؟

۱) $e^{۲}-e$ ۲) $e^{۲}-e^{-۱}$

۳) $\frac{۲^{۴}+۱}{۵}$ ۴) $\frac{۲^{۴}-۱}{۵}$

۲۹۰- حاصل $\frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{t}\frac{cosx}{۱+x^{۳}}dx$ برابر است با:

۱) $\pi^{۲}$ ۲) ۰

۳) $\frac{cost}{۱+t^{۳}}$ ۴) $\frac{cosx}{۱+x^{۳}}$

۲۹۱- حاصل $\int\frac{۱}{x^{۲}-۴}dx$ برابر است با:

۱) $ln|\frac{x+۲}{x-۲}|+c$ ۲) $\frac{۱}{۲}ln|\frac{x+۲}{x-۲}|+c$

۳) $\frac{۱}{۲}ln|x^{۲}-۴|+c$ ۴) $\frac{۱}{۴}ln|\frac{x-۲}{x+۲}|+c$

۲۹۲- حاصل $\int_{۱}^{۲}(x+\frac{۱}{x})^{۲}dx$ کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۲۹}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۲۸}{۳}$

۲۹۳- انتگرال $\int_a^b e^x dx$ کدام است؟

۱) $e^x \frac{b-a}{n}$

۲) $e^x(b-a)$

۳) $e^b - e^a$

۴) $e^x \frac{(b-a)}{n}$

۲۹۴- حاصل $\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x dx$ برابر است با

۱) $\frac{۲}{۳} \sin^{۳/۲} x + \sin x + c$

۲) $\frac{۲}{۳} \sin^{۲/۳} x + \sin x + c$

۳) $\frac{۲}{۳} \sin^{۳/۲} x + c$

۴) هیچکدام

۲۹۵- کدام عبارت معادل $\int x \cos ۳x dx$ است؟

۱) $\frac{۱}{۲} x^۲ \sin^۲ ۳x + \sin ۳x + c$

۲) $\frac{x \sin ۳x}{۳} + \frac{\cos^۳ x}{۹}$

۳) $\frac{۱}{۳} x \sin ۳x + \frac{۱}{۹} \cos ۳x + c$

۴) هیچکدام

۲۹۶- حاصل عبارت $\int x \ln x dx$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲} x^۲ (\ln x)^۲ - \ln x + c$

۲) $\frac{۱}{۲} x^۲ - (\ln x)^۲ + c$

۳) $\frac{x^۲}{۲} \ln x - \frac{x^۲}{۴} + c$

۴) $\frac{۱}{۲} x^۲ (\ln x)^۲ - \frac{x^۲}{۲} + c$

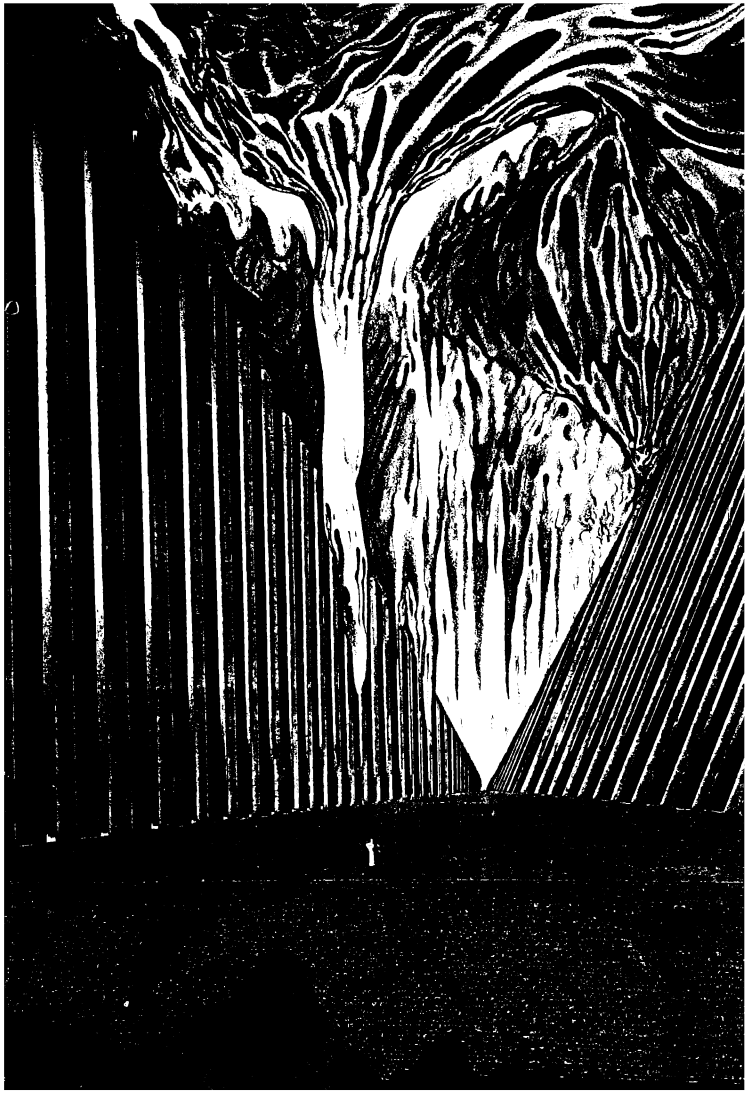
۲۹۷- حاصل $\int e^x \cos x dx$ کدام است؟

۱) $e^x \sin x + \cos x + c$

۲) $\frac{e^x}{۲}(\sin x + \cos x) + c$

۳) $\frac{e^x}{۲}(\sin x + \cos x) + c$

۴) $e^x \cos x - \sin x + c$



۳۳ آزمون از احتمال و نظریهٔ اعداد

۲۹۸- از فاصله $[۰,۴]$ یک عدد انتخاب می‌کنیم احتمال آنکه آن عدد کمتر از یک باشد کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۴

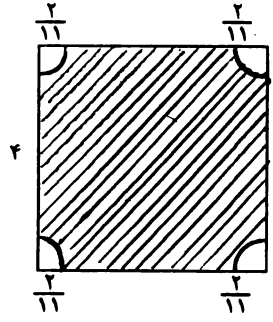
۲۹۹- در آزمون قبل احتمال آنکه عدد کمتر یا مساوی یک باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۳۰۰- دو عدد حقیقی x و y از فاصله $[۰,۱]$ انتخاب می‌کنیم احتمال آنکه $\frac{۱}{۲} < x+y < \frac{۳}{۲}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) هیچکدام

۳۰۱- از گوشه‌های مربعی به ضلع ۴ چهار ربع دایره به شعاع $\frac{۲}{۱۱}$ مطابق شکل مقابل حذف نموده‌ایم اگر یک نقطه از مربع انتخاب کنیم احتمال آنکه نقطه از ناحیه هاشورخورده باشد چقدر است؟



۱) $۱-\frac{\pi}{۴۸۴}$ ۲) $۴-\frac{۴\pi}{۱۲۱}$

۳) $۱۶-\frac{\pi}{۱۲۱}$ ۴) ۱

۳۰۲- از مربع واحد $I=\{(x,y) \mid ۰ \le x \le ۱, ۰ \le y \le ۱\}$ یک نقطه انتخاب می‌کنیم احتمال آنکه داشته باشیم $x \le y \le x+۱$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۳۰۳- دو عدد x, y را از فاصله $(۰,۱)$ انتخاب می‌کنیم احتمال آنکه $|x-y| < \frac{۱}{۲}$ ، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۳۰۴- از مثلثی متساوی الاضلاع به ضلع ۵ یک نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم احتمال آنکه فاصله نقطه با یکی از رأس‌ها کمتر از ۱ باشد چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}\pi}{۷۵}$ ۲) $\frac{۴}{۲۵}$ ۳) $\frac{\pi}{۵۰}$ ۴) $\frac{۲}{۲۵}$

۳۰۵- روی محور اعداد حقیقی دو نقطه x,y بترتیب از فاصلهٔ $[-۲,۰]$ و $[۰,۳]$ انتخاب می‌کنیم احتمال آنکه فاصله x,y بیشتر از ۲ باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۳۰۶- مقدار n چقدر باشد تا تابع زیر یک تابع احتمال متغیر تصادفی x باشد؟

$$P(X=x) = \frac{x}{۲n+۱} \qquad x=۱,۲,۳,۴,۵$$

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳۰۷- از بین ۴ والیبالیست و ۳ فوتبالیست دو نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم احتمال آنکه دو نفر منتخب والیبالیست باشند چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) هیچکدام

۳۰۸- در آزمون قبل احتمال آنکه دو نفر دارای یک رشته ورزشی باشند چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۳۰۹- احتمال برد تیمی در هر بازی $\frac{۲}{۳}$ است اگر تیم ۴ بازی انجام دهد احتمال آنکه تیم درست ۳ بازی را ببرد چقدر است؟

۱) $\frac{۱۶}{۸۱}$ ۲) $\frac{۳۲}{۸۱}$ ۳) $\frac{۶۴}{۸۱}$ ۴) $\frac{۸}{۸۱}$

۳۱۰- در آزمون قبل امید ریاضی متغیر x چقدر است؟

۱) $\frac{۲۱۶}{۸۱}$ ۲) $\frac{۸۰۲}{۸۱}$ ۳) $\frac{۳۱}{۸۱}$ ۴) $\frac{۱۰۴}{۸۱}$

۳۱۱- تابع $P(X=x)=\frac{۲x-۱}{n^۲}$ که $x=۱,...,n$

۱) تابع احتمال است.

۲) تابع احتمال نیست.

۳) برای بعضی از nها تابع احتمال است

۴) به n بستگی دارد.

۳۱۲- دو تاس سالم را با هم می‌ریزیم اگر مجموع شماره‌های رو شده ۶ باشد احتمال اینکه حداقل یکی از دو تاس با شماره ۲ رو شود کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۳۱۳- احتمال آمدن شیر برای سکه همگن دو برابر احتمال آمدن خط است اگر متغیر تصادفی x به صورت ۱=(شیر)xو ۰=(خط)xباشد آنگاه $P(X=۱)$ برابر است با؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۰

۳۱۴- تابع $P(X=i)=\begin{cases}\frac{i}{i^2+3} & i=1,2,3\\ \frac{1}{14} & i=4,5,6\end{cases}$ ...

۱) توزیع احتمال است ۲) توزیع احتمال نیست

۳)بستگی به i دارد ۴)هیچکدام

۳۱۵- در آزمون قبل امید ریاضی x چند است؟

۱) $\frac{14}{37}$ ۲) $\frac{37}{14}$ ۳) $\frac{37}{7}$ ۴) $\frac{7}{37}$

۳۱۶- در آزمون ۳۱۴ مقدار $P(x\geq 3)$ برابر است با:

۱) $\frac{14}{13}$ ۲) $\frac{13}{14}$ ۳) $\frac{13}{28}$ ۴) $\frac{13}{56}$

۳۱۷- اگر x مقادیر $1, 2, \ldots, n$ را اختیار کند کدام تابع، تابع احتمال است؟

۱) $P(X=x)=\frac{1}{n^2}\left[\frac{(n-x)-2x}{2n+x}\right]$

۲) $(X=x)=\frac{1}{n^2}\left[2n-\frac{2nx}{n+1}\right]$

۳) $P(X=x)=n^2\left[\frac{2}{n}+x\right]$

۴) $P(X=x)=n^2\left[\frac{2}{n}-x\right]$

۳۱۸- در آزمون ۳۱۳ اگر سکه را ۵ بار پرتاب کنیم احتمال آنکه ۳ بار شیر مشاهده شود چقدر است؟

۱) $\frac{40}{243}$ ۲) $\frac{80}{243}$ ۳) $\frac{20}{243}$ ۴) $\frac{160}{243}$

۳۱۹- در آزمون قبل احتمال اینکه ۲ بار خط مشاهده شود چقدر است؟

۱) $\frac{40}{243}$ ۲) $\frac{163}{243}$ ۳) $\frac{80}{243}$ ۴) $\frac{160}{243}$

۳۲۰- بـــرای مـــجموعه $\{ ۲۸x+۲۲y \mid ۲۸x+۲۲y>۰ , x, y \in Z \}$ کوچکترین عضو برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱۴

۳۲۱- کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر k,c,b,a اعداد صحیح بوده و b,a با هم صفر نباشند $(a+kb,b)=(a,b)$

۲) حاصلضرب هر دو عدد به صورت $۶k+۵$ بصورت $۶g+۱$ است.

۳) اگر $a,b,c \in Z$ و $(a,b)=۱$ و $a|bc$ آنگاه $a|c$.

۴) $a|b$ اگر و فقط اگر $ac|bc$

۳۲۲- تعداد جوابهای صحیح و مثبت معادله $x_۱+x_۲+x_۳=۱۲$ را بیابید؟

۱) ۱۱ ۲) ۵۵ ۳) ۱۱۰ ۴) ۱۳۲

۳۲۳- اگر $x_۱ , x_۲ , x_۳$ اعداد صحیح مثبت باشند تعداد جوابهای معادله $x_۱+x_۲+x_۳=۴$ برابر است با:

۱) ۱۵ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۳

۳۲۴- معادله $x^{۱۵}+۲x^{۱۰}+۳x^{۲}-x-۵ = ۰$ چند جواب صحیح دارد؟

۱) ۱ ۲) ۱۵ ۳) ۰ ۴) ۲

۳۲۵- اگر $(a,b)=۱$ و $m,n \in N$ آنگاه (a^m,b^n) برابر است با:

۱) mn ۲) m^n

۳) n^m ۴) ۱

۳۲۶- چند عضو از مجموعه $A = \{n \in N \mid n < ۲۱\}$ نه بر ۷ بخش‌پذیر است نه بر ۳:

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۳۲۷- کوچکترین و بزرگترین عضو مجموعه $\{x \in Z : ۱ \leq x < ۱۰\}$ بترتیب برابر است با:

۱) ۱و۱۰ ۲) ۱و۹ ۳) ۰و۱۰ ۴) ۰و۹

۳۲۸- معادله $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۸$ در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲۱ ۳) ۴۵ ۴) هیچکدام

۳۲۹- اگر $(a,b) = ۱$, $c \mid a+b$ کدام غلط است؟

۱) $(a,c) = ۱$ ۲) $(b,c) = ۱$

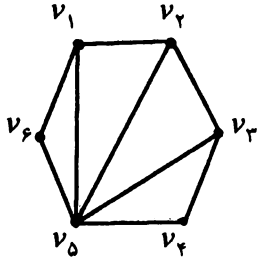
۳) $(b,a) = ۱$ ۴) $c \mid a-b$

۳۳آزمون‌ازگرافها

۳۳۰- چند عدد صحیح وجود دارد که مربع آن بین ۱۰ و ۱۰۰ واقع است؟

۱) ۷ ۲) ۱۴ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۳۳۱- در گراف $G=(V,E)$ کوتاهترین و بزرگترین طول از v_1 به v_4 به ترتیب کدام است؟



۱) $v_1v_2v_3v_4$ و $v_1v_6v_5v_4$

۲) $v_1v_5v_4$ و $v_1v_6v_5v_2v_3v_4$

۳) v_1v_4 و $v_1v_2v_3v_4$

۴) $v_1v_3v_4$ و $v_1v_6v_5v_2v_3v_4$

۳۳۲- اگر کشوری دارای p شهر باشد و این شهرها توسط جاده به هم متصل باشند در این کشور حداقل چند جاده وجود دارد؟

۱) $p-2$ ۲) p ۳) $p-1$ ۴) $p+1$

۳۳۳- گراف $G=(V,E)$ با $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{ab,ac,ae,bd,ce,cd,de\}$ داده شده است چه یالهایی به G اضافه کنیم تا گراف حاصل کامل باشد؟

۱) ad و bc و be ۲) ad و be و cd

۳) ab و be و cd ۴) هیچکدام

۳۳۴- در گراف سؤال ۳۳۳ یک دور به طول ۵ کدام است؟

۱) b و a و c و d و e و a ۲) a و c و e و d و b و a

۳) a و e و c و d و b و a ۴) ۲ و ۳

۳۳۵- اگر $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ باشد مجموعهٔ رأسهای گراف G به اندازه q باشد

۱) $\Sigma\ deg\ v_i = 2q$ ۲) $\Sigma\ deg\ v_i = 2+q$

۳) $\Sigma\ deg\ v_i = 2q-1$ ۴) $\Sigma\ deg\ v_i = 2q-1$

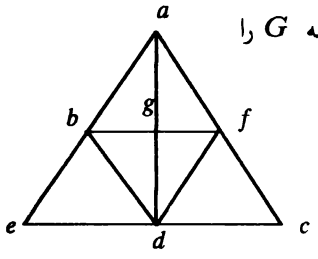
۳۳۶- گراف G، ۳ منتظم از مرتبه p است در صورتی که $q+4=2p$ باشد p چند است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۵

۳۳۷- در گراف G سؤال ۳۳۶، q چند است؟

۱) ۱۱ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۳۳۸- نمودار گراف G به صورت زیر است اندازه G و ماکزیمم درجه G را بیابید.



۱) $q(G)=12$ و $\Delta=5$

۲) $q(G)=11$ و $\Delta=5$

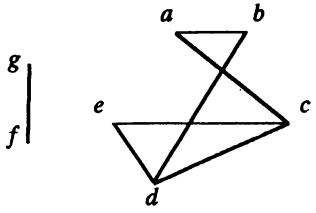
۳) $q(G)=12$ و $\Delta=4$

۴) $q(G)=10$ و $\Delta=4$

۳۳۹- یک دور از گراف G سؤال ۳۳۸ که شامل همه رئوس باشد:

۱) a و g و f و c و d و e و b و a ۲) a و f و g و e و d و c و b و a

۳) g و f و e و d و c و b و a ۴) هیچکدام



♣ **۳۴۰**- در گراف مقابل از رأس a به رأس b چند مسیر وجود دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) ۴

♣ **۳۴۱**- درجه رأسهای گراف G سؤال ۳۴۰ کدام است؟

۱) ۱-۱-۲-۲-۳-۳-۳ ۲) ۱-۱-۲-۲-۳-۳

۳) ۱-۱-۲-۲-۲-۳-۳ ۴) هیچکدام

♣ **۳۴۲**- گراف سؤال ۳۴۰ دارای چند بخش جدا از هم است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱

♣ **۳۴۳**- در گراف کامل تعداد یالها برابر است با:

۱) $2p$ ۲) $p(p-1)$

۳) $\frac{p(p-1)}{2}$ ۴) $2p(p-1)$

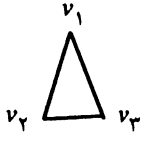
♣ **۳۴۴**- چند گراف ۳ منتظم از مرتبه ۱۳ وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) ۱

♣ **۳۴۵**- در گراف مقابل مجموعه

$$\bar{E} = \{ uv \mid u \neq v \ , \ uv \notin E \}$$

کدام است؟



۱) $\{ v_1v_4, v_1v_5, v_2v_4, v_3v_4, v_2v_5, v_3v_5 \}$

۲) $\{ v_1v_4, v_1v_5, v_1v_3, v_2v_5, v_3v_4, v_3v_5 \}$

۳) $\{ v_1v_4, v_1v_3, v_1v_2, v_2v_5, v_3v_4, v_1v_3 \}$

۴) $\{ v_1v_5, v_2v_5, v_1v_3, v_3v_4 \}$

۳۴۶- چند گراف ۵ منتظم از مرتبه ۱۱ وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۳

۳۴۷- آیا گرافی (ساده) وجود دارد که دنباله درجه‌های تمام رأسهایش به صورت ۰ و ۰ و ۱ و ۱ و ۳ و ۶ باشد؟

۱) بله

۲) خیر

۳) ممکن است

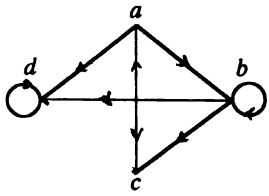
۴) چون تعداد رأسهای فرد عددی فرد است دنباله وجود دارد.

۳۴۸- رابطه R به صورت

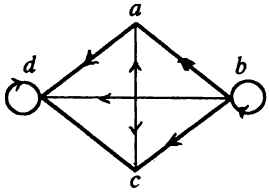
$$\{(b,b),(a,b),(b,c),(a,c),(c,a),(b,d),(a,d),(d,d)\}$$

تعریف شده است گراف جهت‌دار G متناظر با R کدام است؟

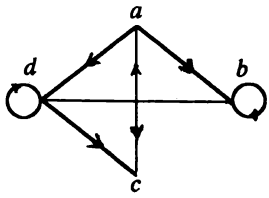
۱)



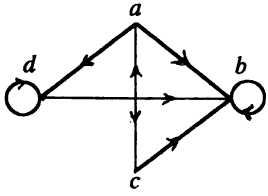
۲)



۳)



۴)



۳۴۹- در سؤال ۳۴۸ ماتریس مجاورت گراف G یعنی $M(R)$ کدام است؟

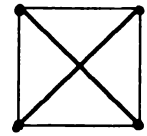
۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

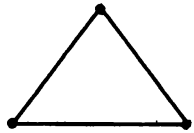
۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

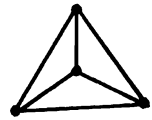
۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۳۵۰- کدام یک از گرافهای زیر گراف ۳ منتظم از مرتبه ۴ است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) ۱ و ۳

۳۵۱- چند گراف وجود دارد که دنباله درجه‌های رأسهایش به صورت زیر باشد؟ ۰و۱و۲و۴و۶

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۳۵۲- کدام یک از گزینه‌های زیر غلط است؟

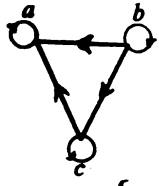
۱) هر گراف همبند G همواره زیر گرافی دارد که فراگیر است.

۲) تعداد رأسهای فرد هر گراف فرد است.

۳) بین هر دو رأس هر درخت مفروض دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

۴) ۲ و ۳ غلط نیست.

۳۵۳- کدام رابطه مربوط به گراف شکل روبرو است؟



۱) $\{ (a,b)\ (b,b)\ (c,c)\ (c,b)\ (c,a)\ (b,a) \}$

۲) $\{(a,b)\ (a,a)\ (b,b)\ (c,c)\ (c,b)\ (c,a)\}$

۳) $\{(a,a)\ (b,b)\ (c,c)\ (b,c)\ (c,a)\ (b,a)\}$

۴) $\{(a,a)\ (a,c)\ (b,a)\ (b,c)\ (c,c)\ (b,b)\}$

♣ **۳۵۴- ماتریس گراف سؤال ۳۵۳ کدام است؟**

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

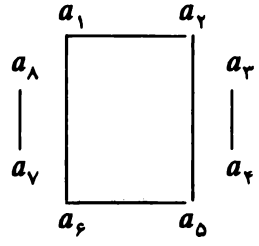
۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

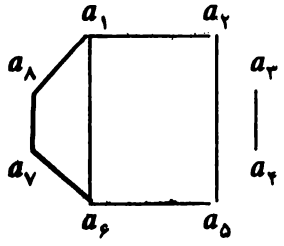
♣ **۳۵۵- برای گراف سؤال ۳۵۳ ، $M\ (ROR)$ کدام است؟ آیا خاصیت ترایایی دارد؟**

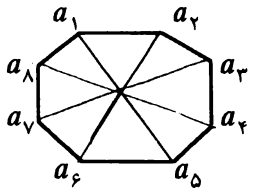
۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ - بله ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ - بله

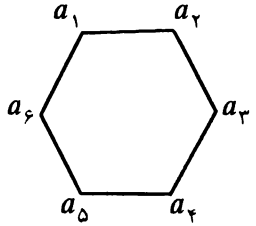
۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ - خیر ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ - خیر

♣ **۳۵۶- گراف G- ۳ منتظم از مرتبه p است در صورتیکه $q+۴=۲p$، گراف همبند آن کدام است؟**

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳۵۷- تعریف گراف همبند G با کدام یک از گزینه‌ها مطابقت دارد؟

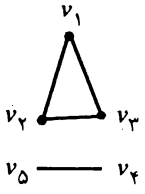
۱) گراف G همبند است هرگاه فقط بین دو رأس آن مسیری وجود نداشته باشد.

۲) گراف G همبند است هرگاه بین هر دو رأس آن مسیری وجود داشته باشد

۳) گراف G همبند است هرگاه تعداد یالهای آن $\frac{p(p-1)}{2}$ باشد.

۴) هیچکدام

۳۵۸- گراف $(V(G)$ و $E(G))$ در شکل روبرو مشخص شده است و مجموعه $\overline{E}=\{uv \mid u\neq v$ و $uv\notin E\}$ مشخص شده است گراف $(V,E\cup \overline{E})$ کدام است؟



۱) گراف کامل مرتبه ۴

۲) گراف کامل مرتبه ۵

۳) گراف مرتبه ۴

۴) گراف مرتبه ۶

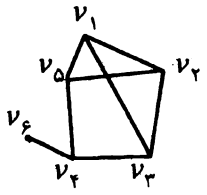
۳۵۹- کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) رأس v را زوج گوییم هرگاه تعداد یالهای عبور کرده از v زوج باشد.

۲) رأس v را زوج گوییم هرگاه درجه رأس v زوج باشد.

۳) گراف کامل گرافی است که تعداد یالهای آن $\frac{p(p-1)}{2}$ باشد.

۴) همه موارد درست است.



۳۶۰- در مورد گراف زیر کدام درست است؟

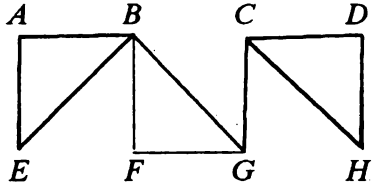
۱) گراف ۳ منتظم است.

۲) گراف از مرتبه ۶ است و گراف کامل است.

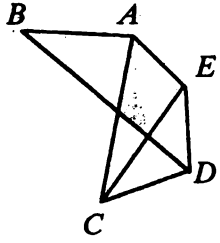
۳) گراف همبند است.

۴) گراف از مرتبه ۶ است که ۵ رأسش از درجه ۳ است.

۳۶۱- در گراف زیر چند مسیر از رأس A به رأس H وجود دارد؟



۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) ۸



۳۶۲- در گراف شکل مقابل مرتبه و اندازه گراف بترتیب چند است؟

۱) ۵ و ۷ ۲) ۱۵ و ۷

۳) ۷ و ۵ ۴) ۵ و ۱۷

۳۶۳- در آزمون قبل درجه رأس‌های B,E بترتیب برابر است با:

۱) ۳و۴ ۲) ۳و۲ ۳) ۲و۳ ۴) ۴و۳

۲۲ آزمون از اعداد مختلط

♣ ۳۶۴- اگر $z_1=3-2i$ و $z_2=2+7i$، حاصل $z_1 \times z_2$ برابر است با:

۱) $6-14i$ ۲) $5-14i$

۳) $-8+17i$ ۴) $20+17i$

♣ ۳۶۵- اگر $z_1=3-2i$ و $z_2=2+7i$ ، حاصل z_1+z_2 برابر است با:

۱) $5-5i$ ۲) $5\pm5i$

۳) $5+5i$ ۴) $4-4i$

♣ ۳۶۶- اگر $z=2+3i$ ، فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{12}$ ۲) $\sqrt{13}$

۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{7}$

♣ ۳۶۷- مزدوج عدد $z=4-3i$ کدام است؟

۱) $-4-3i$ ۲) $-4+3i$

۳) $4+3i$ ۴) $4-3i$

♣ ۳۶۸- اگر $z=4+2i$ ، و $\bar{z}$ مزدوج z باشد حاصل $|\bar{z}|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{20}$ ۲) ۲۰ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

۳۶۹- صورت قطبی عدد $z=۱+i$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}(\cos\frac{\pi}{۴}-i\sin\frac{\pi}{۴})$ ۲) $(\cos\frac{\pi}{۴}+i\sin\frac{\pi}{۴})$

۳) $\sqrt{۲}(\sin\frac{\pi}{۴}+i\cos\frac{\pi}{۴})$ ۴) $\sqrt{۲}(\cos\frac{\pi}{۴}+i\sin\frac{\pi}{۴})$

۳۷۰- صورت قطبی مزدوج عدد $z=۱+i$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}(\cos\frac{۷\pi}{۴}-i\sin\frac{۷\pi}{۴})$ ۲) $(\cos\frac{\pi}{۴}-i\sin\frac{\pi}{۴})$

۲) $\sqrt{۲}(\cos\frac{\pi}{۴}+i\cos\frac{\pi}{۴})$ ۴) $\sqrt{۲}(\sin\frac{\pi}{۴}-i\cos\frac{\pi}{۴})$

۳۷۱- کدام گزینه غلط است؟

۱) $i^{۵}=+i$ ۲) $i^{۴}=-۱$

۳) $i^{۳}=-i$ ۴) $i^{۲}=-۱$

۳۷۲- اگر $z_۱=-۲$ و $z_۲=۱+i\sqrt{۳}$ باشد $\frac{z_۱}{z_۲}$ کدام است؟

۱) $e^{-i۲\pi/۳}$ ۲) $e^{i\pi/۲}$

۳) $e^{i۲\pi/۳}$ ۴) $e^{-i\pi}$

۳۷۳- اگر $z=۱+i$ باشد $z^{۳}$ برابر است با:

۱) $۲i(-۱+i)$ ۲) $۲i(۱-i)$

۳) $۲i(-۱-i)$ ۴) $۲i(۱+i)$

۳۷۴- حاصل $(\sqrt{۲}-i)-(i(۱-\sqrt{۲}i))$ کدام است؟

۱) i ۲) $-i$ ۳) $-۲i$ ۴) $۲i$

۳۷۵- حاصل $(-i-۱)^{۴}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۴

♣ ۳۷۶- در معادلهٔ $|z+i| = |z-i|$ اگر $z=a+ib$ ، بترتیب مجموعه جواب روی ... قرار دارد.

۱) محور حقیقی ۲) محور موهومی

۳) محور حقیقی و موهومی ۴) هیچکدام

♣ ۳۷۷- در معادلهٔ $(۱+i)^n=(۱-i)^n$ ، n کدام است؟

۱) $۲k$ ۲) $۳k$ ۳) $۴k$ ۴) k

♣ ۳۷۸- در معادلهٔ $z+\frac{۱}{z}=۱$ جوابها کدامند؟

۱) $cos\frac{\pi}{۳}+isin\frac{\pi}{۳}$ ۲) $cos-\frac{\pi}{۳}+isin-\frac{\pi}{۳}$

۳) $cos\frac{\pi}{۳}-isin(\pm\frac{\pi}{۳})$ ۴) $cos(\pm\frac{\pi}{۳})+isin(\pm\frac{\pi}{۳})$

♣ ۳۷۹- معادلهٔ $x^۶+x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱=۰$ چند جواب دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

♣ ۳۸۰- جواب معادلهٔ $|z|-z=۱+۲i$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}+۲i$ ۲) $-\frac{۳}{۲}+۲i$

۳) $\frac{۳}{۲}-۲i$ ۴) $-\frac{۳}{۲}-۲i$

♣ ۳۸۱- حاصل $(\frac{\sqrt{۳}-i}{\sqrt{۳}+i})^۴$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$ ۲) $-\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$

۳) $-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$ ۴) $\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$

۳۸۲- ریشه‌های معادله $z^۴=۱$ کدام است؟

۱) $z=\pm ۱, \pm i$ ۲) $z=\pm ۱ \pm i$

۳) $z=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} i$ ۴) $z=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} i$

۳۸۳- صورت قطبی عدد مختلط $۲\sqrt{۳}i+۲$ کدام است؟

۱) $۴(\cos\frac{\pi}{۳} + i \sin\frac{\pi}{۳})$ ۲) $\frac{۱}{۴}(\cos\frac{\pi}{۴} + i \sin\frac{\pi}{۴})$

۳) $۴(\cos\frac{\pi}{۶} + i \sin\frac{\pi}{۶})$ ۴) $\frac{۱}{۴}(\cos\frac{\pi}{۶} + i \sin\frac{\pi}{۶})$

۳۸۴- حاصل $(\sqrt{۳}i+۱)^{۱۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲^{۱۲}}$ ۲) $۱۲^۲$ ۳) $۲^{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲^۲}$

۳۸۵- جوابهای معادله $z^n=۱$ در صفحه مختلط همواره

۱) روی یک خط قرار دارند

۲) داخل و روی دایره قرار دارند

۳) روی یک دایره به شعاع نا معلوم قرار دارند

۴) روی یک دایره به شعاع معلوم قرار دارند

۵۵آزمون‌ازجبرخطی

۳۸۶- کدام صفحه ، زیر فضای برداری R^3 می‌باشد؟

۱) $x+3y-z=0$ ۲) $-x-2y+5z+1=0$

۳) $x+2y=3$ ۴) $2x+3-z=0$

۳۸۷- مجموعه نقاط صادق در کدام معادله یا معادلات یک زیر فضای برداری است؟

۱) $\begin{cases} x+3y-z=0 \\ x+3y-z=9 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x+3y-z=-10 \\ x+3y-z=0 \\ x+3y-z=-1 \end{cases}$

۳) $x=3y=-z$ ۴) $x-1=3y=z$

۳۸۸- بردار $\vec{V}=2i-3j+5k$ با کدام بردار وابستگی خطی ندارد؟

۱) $i-1/5j+2/5k$ ۲) $-4i-6j-10k$

۳) $-i+1/5j-2/5k$ ۴) $6i-9j+15k$

۳۸۹- در فضای R^3 کدامیک از دسته بردارهای زیر حتماً مستقل خطی هستند؟

۱) سه بردار که همگی موازی نباشند.

۲) سه بردار که دو به دو بر هم عمود باشند.

۳) سه بردار واقع در یک صفحه.

۴) سه بردار که یکی از آنها بردار صفر است.

۳۹۰- مجموعه نقاط صادق در کدام معادله یک زیر فضای برداری R^2 است؟

۱) $y=x^2$ ۲) $y=x^3$ ۳) $y=x$ ۴) $y=1$

۳۹۱- دو بردار $\vec{V}=7i+8j+9k$ و $\vec{U}=i+2j+3k$ همراه با کدام بردار تشکیل یک پایه برای R^3 نمی‌دهد؟

۱) $\vec{W}=i+j+k$ ۲) $\vec{W}=2i-3j-k$

۳) $\vec{W}=-i+j-7k$ ۴) $\vec{W}=2i-13j+6k$

۳۹۲- اگر بتوان بردار $\vec{U}=2i+2j+4k$ را بصورت ترکیبی خطی از بردارهای $\vec{V}=2i-2j+2k$ و $\vec{W}=3mj+3k$ نوشت در اینصورت m کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۹۳- اگر بردارهای $U=(1,3,2)$ و $V=(1,m,0)$ و $W=(0,2,1)$ وابسته خطی باشند m کدام است؟

۱) ± 1 ۲) ۰ ۳) -1 ۴) ۲

۳۹۴- عبارت $\cos(x-\frac{\pi}{4})$ ترکیب خطی $\cos x$ و $\sin x$ است. ضریبهای این ترکیب عبارتند از:

۱) $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ ۲) ۱ و -1

۳) ۰ و ۱ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳۹۵- یک پایه فضای R^3 الزاماً چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۰

۳۹۶- ♣ ابعاد مربوط به تبدیل نگاشت $\begin{cases} y_1=3x_1-5x_2 \\ y_2=-2x_1 \\ y_3=\sqrt{2}x_1+x_2 \end{cases}$ کدام است؟

۱) 2×2 ۲) 2×3 ۳) 3×2 ۴) 3×3

۳۹۷- ♣ اگر f و g دو نگاشت خطی باشند که بصورت $f: R^3 \to R^4$ و

$g: R^k \to R^۴$ تعریف شده است. در اینصورت شرط لازم و کافی برای آنکه gof تعریف شده باشد آنستکه k برابر باشد با:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

♣ ۳۹۸- اگر f و g دو نگاشت خطی باشند که بصورت $f: R^n \to R^m$ و $g: R^k \to R^l$ تعریف شده است. در اینصورت شرط لازم و کافی برای آنکه fog تعریف شده باشد آن است که :

۱) $l=m$ ۲) $m=n$

۳) $l=n$ ۴) $k=n$

♣ ۳۹۹- اگر نگاشتهای f و g بترتیب به صورت $\begin{cases} y_۱=-x_۱+x_۲ \\ y_۲=۲x_۱-x_۲ \end{cases}$ و $\begin{cases} y_۱=-x_۱ \\ y_۲=x_۱-۲x_۲ \end{cases}$ تعریف شده باشند آنگاه تبدیل نظیر fog کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۵ & -۳ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$

♣ ۴۰۰- ابعاد مربوط به تبدیل نگاشت $f: R^۲ \to R^۳$ کدام است؟

۱) ۲×۲ ۲) ۲×۳ ۳) ۳×۲ ۴) ۳×۳

♣ ۴۰۱- هرگاه برای نگاشت f تساوی $f(۰,۰,۰)=(۰,۱)$ برقرار باشد کدام گزینه وضعیت f را مشخص می‌کند؟

۱) $f: R^۲ \to R^۳$ ۲) $f: R^۲ \to R^۲$

۳) $f: R^۳ \to R^۲$ ۴) $f: R^۳ \to R^۴$

۴۰۲- اگر نگاشت f به صورت $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ y_2 = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \end{cases}$ تعریف شده باشد بعد هسته f کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۰۳- برای نگاشت f که به صورت $\begin{cases} y_1 = 4x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{cases}$ تعریف شده است بعد هسته f برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۰۴- در آزمون قبلی هسته f در امتداد کدام بردار است؟

۱) $5i - 13j + 7k$ ۲) $3i + 3j - 7k$

۳) $5i + 1j$ ۴) $5i + 3j - 3k$

۴۰۵- تبدیل متناظر نگاشت f که به صورت $f(x, y, z) = (-x+y-3z, -x+2z)$ تعریف شده کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

۴۰۶- در آزمون قبلی هستهٔ نگاشت کدام است؟

۱) یک نقطه ۲) یک صفحه

۳) یک خط در فضای دو بعدی ۴) یک خط در فضای سه بعدی

۴۰۷- ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ تبدیل یک نگاشت است، هستهٔ این

نگاشت چند بعدی است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

♣ ۴۰۸- نگاشت مربوط به ماتریس مذکور در آزمون قبلی را در نظر بگیرید هستهٔ نگاشت کدام است؟

۱) یک نقطه ۲) یک صفحه

۳) یک خط در فضای دو بعدی ۴) یک خط در فضای سه بعدی

♣ ۴۰۹- نگاشت $f(x , y , z) = (x+۲y-۳z , -x+۲z)$ چگونه است؟

۱) پوشا و یک‌به‌یک است.

۲) پوشا و غیر یک‌به‌یک است.

۳) غیر پوشا و یک‌به‌یک است.

۴) غیر پوشا و غیر یک‌به‌یک است.

♣ ۴۱۰- هستهٔ نگاشت $f(x , y) = (x+۲y , x+۲y, -x-۲y)$ چگونه است؟

۱) یک نقطه ۲) یک صفحه

۳) یک خط در فضای دو بعدی ۴) یک خط در فضای سه بعدی

♣ ۴۱۱- نگاشت $f(x , y) = (x+۲y,x+۲y, -x+۲y)$ چگونه است؟

۱) پوشا و یک‌به‌یک است.

۲) پوشا و غیر یک‌به‌یک است.

۳) پوشا و غیر یک‌به‌یک است.

۴) غیر پوشا و غیر یک‌به‌یک است.

♣ ۴۱۲- هستهٔ نگاشت آزمون قبل چگونه است؟

۱) یک نقطه ۲) یک صفحه

۳) یک خط در فضای دو بعدی ۴) یک خط در فضای سه بعدی

♣ ۴۱۳- اگر نگاشت $f: R^n \to R^m$ پوشا باشد آنگاه الزاماً

۱) $m=n=۱$ ۲) $n \leq m$ ۳) $m \leq n$ ۴) $m=n$

۴۱۴- اگر نگاشت $f: R^n \to R^m$ یک‌به‌یک و پوشا باشد آنگاه الزاماً

۱) $m=n=1$ ۲) $n<m$

۳) $m<n$ ۴) $m=n$

۴۱۵- مجموعه‌های تراز برای نگاشت f که با ضابطه $f(x, y)=(x+2y, x+2y, -x+2y)$ معرفی می‌شود کدام است؟

۱) یک نقطه ۲) یک صفحه

۳) یک خط در فضای دو بعدی ۴) یک خط در فضای سه بعدی

۴۱۶- مجموعه‌های تراز برای نگاشت f که با ضابطه $f(x, y, z) = (x+2y-3z, -x+2z)$ معرفی می‌شود کدام است؟

۱) یک نقطه ۲) یک صفحه

۳) یک خط در فضای دو بعدی ۴) یک خط در فضای سه بعدی

۴۱۷- در آزمون قبلی مجموعه تراز مربوط به نقطه $(-1, 1)$ کدام است؟

۱) $\frac{x}{2} = \frac{4y+1}{1} = \frac{z+1}{2}$ ۲) $x=4y+1=2z+1$

۳) $x=4y+1$ ۴) $4y+1=2z+1$

۴۱۸- اگر نگاشت $f: R^n \to R^m$ داده شده باشد و $n>m$ در اینصورت هستهٔ f الزاماً

۱) یک نقطه است.

۲) یک زیرفضای برداری است.

۳) یک زیرفضابا بعد کمتر از یک است.

۴) یک خط است.

۴۱۹- اگر نگاشت $f: R^n \to R^m$ داده شده باشد و $n<m$ در اینصورت هستهٔ f الزاماً ... است.

۱) یک نقطه ۲) یک زیرفضای برداری

۳) زیرفضایی با بعد کمتر از یک ۴) هیچکدام

♣ ۴۲۰- در آزمون قبلی اگر $n>2$ و $m=1$ در اینصورت هستهٔ f کدام گزینه دقیقتر است؟

۱) یک فضای برداری بابعد ۱ است.

۲) یک فضای برداری بابعد بیش از ۱ است.

۳) یک فضای برداری بابعد بیش از ۲ است.

۴) یک فضای برداری بابعد مثبت است.

♣ ۴۲۱- در آزمون قبلی اگر علاوه بر مفروضات داده شده $n\leq 3$، آنگاه مجموعه‌های تراز عبارتند از

۱) نقطه ۲) خط ۳) صفحه ۴) فضا

♣ ۴۲۲- اگر نگاشت $f: R^2 \to R^2$ توسط ماتریس $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$ معرفی شود دراینصورت تراز این نگاشت کدام است؟

۱) $2y+x=k$ ۲) $2y-x=k$

۳) $y+2x=k$ ۴) $y-2x=k$

♣ ۴۲۳- اگر نگاشت $f: R^3 \to R^2$ توسط ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ معرفی شود در اینصورت مجموعهٔ تراز مربوط به نقطه $(1,1)$ کدام است؟

۱) $\begin{cases} x=-2 \\ y-3z=3 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x-2z=-3 \\ -x+y-3z=3 \end{cases}$

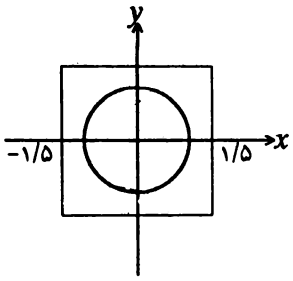
۳) $\begin{cases} x=-1 \\ y-3z=3 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} -x+2z=1 \\ -x+y-3z=1 \end{cases}$

♣ ۴۲۴- اگر نگاشت $f: R^2 \to R^3$ توسط ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ معرفی شود دراینصورت تراز این نگاشت کدام است؟

۱) یک نقطه ۲) یک صفحه

۳) یک خط در فضای دو بعدی ۴) یک خط در فضای سه بعدی

۴۲۵- مطابق شکل مقابل دایره واحد تحت تأثیر کدام تجانس محیط بر مربع به مرکز مبدأ و طول ضلع ۳ می‌شود.



۱) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} \sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۲} \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲\sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & ۲\sqrt{۲} \end{bmatrix}$

۴۲۶- در آزمون قبلی کدام گزینه صحیح است؟

۱) نمی‌توان نگاشتی خطی یافت که دایره را به دایره‌ای با مساحت مساوی مربع بنگارد.

۲) می‌توان نگاشتی خطی یافت که دایره را به دایره‌ای با مساحت مساوی مربع بنگارد.

۳) می‌توان نگاشتی خطی یافت که دایره را بر روی مربع بنگارد.

۴) هیچکدام

۴۲۷- کدام گزینه صحیح است؟

۱) هر تابع از R^n به R^m یک نگاشت خطی است و بالعکس.

۲) هر نگاشت خطی از R^n به R^m یک تابع است و بالعکس.

۳) هر نگاشت خطی از R^n به R^m یک تابع است.

۴) هر تابع از R^n به R^m یک نگاشت خطی است.

۴۲۸- اگر روی صفحه ابتدا یک انقباض با ضریب ۳ و سپس یک تقارن نسبت به محور yها انجام دهیم نتیجه توسط کدام ماتریس مشخص می‌شود؟

۱) $\begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -\sqrt{۳} & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۳} \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۳} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$

۴۲۹- ترکیب کدام نگاشت با خودش نگاشت همانی است؟

۱) تقارن نسبت به یک خط دلخواه ۲) تجانس

۳) دوران ۴) هر سه مورد

۴۳۰- دترمینان ماتریس تجانس با ضریب ۳ برابراست با

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۹ ۴) ۳

۴۳۱- برای نگاشت $f(x,y) = (x-y, -x-۴y, -x+y)$ حاصل $f^{-۱}(۱,۴,-۱)$ برابر است با

۱) $(۰,-۱)$ ۲) $(۱,-۲)$ ۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(-۱,۱)$

۴۳۲- اگر S تقارن نسبت به خط مفروض l باشد حاصل $S^{۳۵۷}$ کدام است؟

۱) I ۲) $\frac{۱}{|S|}S$

۳) S ۴) $|S|S^{۳۵۶}$

۴۳۳- m و n چه اعدادی باشند تا دو ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & n \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ m & ۰ & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}$ معکوس یکدیگر باشند؟

۱) $\begin{cases} m=۲ \\ n=۱ \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} m=۲ \\ n=-۲ \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} m=۳ \\ n=۳ \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} m=۰ \\ n=۰ \end{cases}$

۴۳۴- اگر ماتریس مربوط به یک دستگاه سه معادله ، سه مجهولی بصورت $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۱ & -۳ \\ ۱ & ۰ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، جوابهای دستگاه کدام است؟

۱) ۱ و ۱- و ۲ ۲) ۱ و ۱ و ۲

۳) ۱ و ۱- و ۱ ۴) ۱- و ۱- و ۱

۴۳۵- مقدار m چه باشد تا تعداد جوابهای دستگاه

$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ x-my-3z=-1 \\ -8x+5z=0 \end{cases}$$

دقیقاً یکی باشد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) هر سه جواب

۴۳۶- به ازای چه مقداری از m تعداد جوابهای دستگاه

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x-my-z=0 \\ -x+2y+z=0 \end{cases}$$

بی‌شمار است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۳۷- مقدار m چه باشد تا تعداد جوابهای دستگاه

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-3z=-m \\ 2x+4z=0 \end{cases}$$

بی‌شمار باشد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) هیچکدام

۴۳۸- اگر دستگاه نظیر ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 6 & m \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ جواب نداشته باشد مقدار m مخالف کدام گزینه است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۰ ۴) ۱

۴۳۹- اگر دستگاه $\begin{cases} cx+ay+bz=0 \\ bx+cy+az=0 \\ ax+by+cz=0 \end{cases}$ جواب غیر صفر داشته باشد

آنگاه چه رابطه‌ای بین a و b و c برقرار است؟

۱) $a^۳+b^۳+c^۳\neq ۳abc$ ۲) $a^۳+b^۳+c^۳=۳abc$

۳) $a^۲+b^۲+c^۲\neq ۳abc$ ۴) $a^۲+b^۲+c^۲=۳abc$

۴۴۰- حاصلضرب مقادیر ویژهٔ ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) ۰ ۴) -۱۰

۴۴۱- حاصلجمع مقادیر ویژهٔ ماتریس $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \alpha \\ ۰ & \beta & ۰ \\ \gamma & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) ۰ ۴) -۱۰

۴۴۲- در آزمون قبلی اگر $\alpha\gamma>۰$ آنگاه مقادیر ویژه کدام است؟

۱) β ۲) β و $\sqrt{\alpha\gamma}$ و $-\sqrt{\alpha\gamma}$

۳) γ و β و α ۴) β و $\frac{\alpha\gamma}{\beta}$ و $-\frac{\alpha\gamma}{\beta}$

۴۴۳- امتدادهای ویژهٔ ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{cases} ۲x_۱=-x_۲ \\ x_۱=۲x_۲ \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} ۲x_۱=-x_۲ \\ x_۱=-x_۲ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} ۲x_۱=x_۲ \\ x_۱=۲x_۲ \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} ۲x_۱=x_۲ \\ x_۱=-x_۲ \end{cases}$

۴۴۴- خطوط $x_۱=x_۲$ و $x_۱=-x_۲$ امتدادهای ویژهٔ کدام ماتریس است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۴۴۵- مقادیر n و m را طوری بیابید که برای ماتریس $\begin{bmatrix} m & ۱ & ۰ \\ ۱ & n & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ مجموع و حاصلضرب مقادیر ویژه به ترتیب ۲ و ۲- باشد.

۱) $n=m=۱$ ۲) $m=\pm ۱$ و $n=\pm ۱$

۳) $n=m=-۱$ ۴) $m=-۱$ و $n=۱$

۴۴۶- معادله $ax^۲+۲bxy+cy^۲=d$ هذلولی است هر گاه

۱) $ac-b^۲<۰$ ۲) $ac-b^۲=۰$

۳) $ac-b^۲>۰$ ۴) $b<۰$

۴۴۷- اگر $f:R^۳ \to R^۳$ یک تبدیل خطی با ماتریس وابستهٔ A باشد حجم تبدیل یافتهٔ مکعب واحد برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{|A|}$ ۴) $|A|$

۴۴۸- درآزمون قبل اگر $f:R^۳ \to R^۲$ ، آنگاه حجم تبدیل یافتهٔ مکعب واحد برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{|A|}$ ۴) $|A|$

۴۴۹- بـه انـدازهٔ کـدام زاویـه صـفحه را دوران دهـیم تـا مـقطع مـخروطی $۲x^۲+۸xy+۱۰y^۲=۲۱$ به صورت استاندارد در آید؟

۱) $-\frac{\pi}{۸}$ ۲) $\frac{\pi}{۸}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $-\frac{\pi}{۴}$

۴۵۰- شکل استاندارد مقطع مخروطی $ax^۲+۲hxy+ay^۲=c$ با دوران چند درجه حاصل می‌شود؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۹۰

۴۵۱- بیضی به معادلهٔ $\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۹}=۱$ را به اندازهٔ ۹۰ درجه در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم معادلهٔ حاصل چیست؟

۱) $\frac{x^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۴}=۱$ ۲) $\frac{x^۲}{۹}+\frac{y^۲}{۴}=۱$

۳) $\frac{x^۲}{۲}+\frac{y^۲}{۳}=۱$ ۴) $\frac{x^۲}{۴}-\frac{y^۲}{۹}=۱$

۶آزمون‌از توابع هموگرافیک

۴۵۲- اگر منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ مفروض $y=\frac{ax+b}{x+a}$ محور xها را در $x=-۱$ قطع کند. و خط $x+۲=۰$ مجانب منحنی باشد ، اندازهٔ واسطه هندسی a و bکدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۴۵۳- نمودار تابع با ضابطهٔ مفروض $f(x)=\frac{ax+۱}{ax+b}$ و خط $۲x-y+۲=۰$ روی محورها همدیگر را قطع می‌کنند، اندازهٔ $(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b})$ کدام است؟ $(ab\neq ۰)$

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

۴۵۴- تابع با ضابطهٔ $y=\frac{۲x-۳}{۳x-۵}$ در فاصلهٔ $[\frac{۴}{۳},\frac{-۴}{۷}]$ و $[-۲,\frac{-۳}{۵}]$ به ترتیب چگونه است؟

۱) نزولی - نزولی ۲) صعودی - نزولی

۳) نزولی - صعودی ۴) صعودی - صعودی

۴۵۵- به ازای چه مقادیری از m تابع با ضابطهٔ مفروض $y=\frac{۲x+m}{mx+۸}$ مقداری ثابت است؟

۱) ± ۱ ۲) ± ۲ ۳) ± ۳ ۴) ± ۴

۴۵۶- معادلهٔ مکان هندسی مرکز تقارن تابع $y=\frac{۲-x\sin^۲t}{\cos^۲t-x}$ کدام است؟

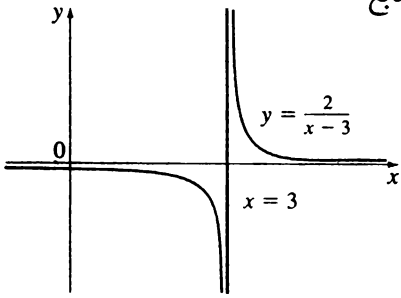
۱) $x^۲+y^۲=۱$

۲) $x+y=۱$

۳) $x^۲-y^۲=۱$

۴) $x+y=-۱$

۴۵۷- نمودار مقابل مربوط به کدام تابع است؟



۱) $y=\frac{x-۳}{۲}$

۲) $y=\frac{۲}{x-۳}$

۳) $y=\frac{۲}{x-۲}$

۴) $y=\frac{۲}{x+۳}$

سؤالات کنکور های نظام جدید و پیشدانشگاهی

سؤالات کنکور مرحلهٔ اول ۷۶-۷۵

*۴۵۸- دنباله $\left\{ cosn\frac{\pi}{۲} \right\}$ ...

۱) کراندار است و همگرا نیست.

۲) کراندار است و همگراست.

۳) کراندار نیست ولی همگراست.

۴) کراندار نیست و همگرا نیست.

*۴۵۹- دنباله $\left\{\sqrt{n^۲+۱}-n\right\}$ کدام وضع را دارد؟

۱) همگرا به ۱-　　۲) همگرا به ۱

۳) واگرا　　۴) همگرا به صفر

۴۶۰- اگر $f(x)=۲x+۱$ و $g(x)=x-۱$ ، ضابطه تعریف تابع $fog^{-۱}$ کدام است؟

۱) $۲x+۱$　　۲) $۲x+۲$　　۳) $۲x+۳$　　۴) $۲x+۴$

۴۶۱- حد عبارت $\frac{[x]+۱}{x^۲-۱}$ وقتی $x \to -۱^+$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$　　۲) ۰　　۳) $\frac{۱}{۲}$　　۴) ∞

کنکور نظام جدید فقط در سال ۷۶-۷۵ بصورت دو مرحله‌ای برگزار شد.

۴۶۲- تابع با ضابطه $f(x)=\frac{|x|}{-\sqrt{-x}}$ بر کدام مجموعه پیوسته است؟

۱) $]-\infty,0[$ ۲) $]-\infty,0]$

۳) $]0,\infty[$ ۴) $[0,\infty[$

۴۶۳- تانژانت زاویه بین نیم مماس چپ و نیم مماس راست منحنی تابع با ضابطه $y=\frac{|x|-1}{|x|+1}$ در نقطه $(0,-1)$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۴۶۴- اگر $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{3}{2}$ باشد، $\left(f(\frac{1}{x})\right)'$ در $x=\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -6 ۳) -3 ۴) ۳

۴۶۵- تابع f با ضابطه $f(x)=x^2|x|$ در $x=0$ ...

۱) مشتق اول دارد ولی مشتق دوم ندارد.

۲)مشتق دوم دارد ولی مشتق اول ندارد.

۳) مشتق اول و دوم ندارد.

۴)مشتق اول و دوم دارد.

۴۶۶- تابع با ضابطه $f(x)=x^3+3x$ مفروض است. ضریب زاویه مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه‌ای به طول ۴ واقع بر آن کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۴۶۷- تابع $f(x)=|x^2-1|$ بر بازه $[-2,2]$ ...

۱) مشتق‌پذیر است و می‌نیمم مطلق دارد.

۲) مشتق‌پذیر است ولی می‌نیمم مطلق ندارد.

۳) مشتق‌پذیر نیست ولی می‌نیمم مطلق دارد.

۴) مشق پذیر نیست و می‌نیمم مطلق ندارد.

♣ **۴۶۸**- ذره‌ای روی مسیر $۲y^۲-x^۲=۱$ حرکت می‌کند. اگر مؤلفه x آن با سرعت ۰/۱ متر در ثانیه افزایش یابد، در نقطه (۱,۱) مؤلفه y آن با چه سرعتی در ثانیه تغییر می‌کند؟

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۱ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۲

۴۶۹- حاصل عبارت $sec^۲۲x\ (cos۵x + cos۳x + ۲cosx)$ برابر کدام است؟

۱) $۴secx$ ۲) $۴cosx$

۳) $۴cos۲x$ ۴) $۴cos^۲x$

۴۷۰- نقاط پایانی جواب‌های معادلهٔ

$$(۱+\sqrt{۳})sin^۲x+(۱-\sqrt{۳})sinxcosx=\sqrt{۳}$$

بر روی دایرهٔ مثلثاتی رأس‌های کدام چهار ضلعی است؟

۱) مربع ۲) مستطیل

۳) ذوزنقه ۴) **چهارضلعی غیر مشخص**

۴۷۱- حد عبارت $sin۴x(cot۲x-cotx)$ وقتی $x\to ۰$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۴

۴۷۲- معادله خط مجانب نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{۱}{x}+\frac{۴-۲x}{\sqrt{x^۲-۲x}}$ وقتی $x<۰$ کدام است؟

۱) $y=-۲$ ۲) $y=-۱$ ۳) $y=۱$ ۴) $y=۲$

۴۷۳- ضریب زاویه خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه (x,y) برابر $۶x\sqrt{۲x^۲-۱}$ است. اگر نمودار تابع f از (۱,۱) بگذرد، ضابطه آن کدام است؟

۱) $y=x(۲x^۲-۱)\sqrt{۲x^۲-۱}$ ۲) $y=(۲x-۱)\sqrt{۲x^۲-۱}$

۳) $y=(۲x^۲-۱)\sqrt{۲x^۲-۱}$ ۴) $y=(۲x^۲-x)\sqrt{۲x^۲-۱}$

۴۷۴- اگر $F(x)=\int \frac{sinx}{\sqrt{1+tan^2x}}dx$ ، آنگاه $F(\pi)-F(\frac{3\pi}{4})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

♣ ۴۷۵- مقدار $\int_1^{e^2} \frac{lnx}{x}dx$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) e ۳) $2e$ ۴) e^2

۴۷۶- مساحت محدود بین نمودار دو تابع $x=y^2-1$ و $x=-y^2+1$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{10}{3}$

۴۷۷- بردار عمود بر دو بردار $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{b}=\vec{i}-\vec{k}$ کدام است؟

۱) $\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ۲) $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

۳) $-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ ۴) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

۴۷۸- حاصل $\vec{i}\times\vec{j}-\vec{j}\times\vec{i}$ کدام است؟

۱) $-2\vec{k}$ ۲) صفر ۳) $\vec{k}$ ۴) $2\vec{k}$

۴۷۹- سه بردار $(-3,2,1)$ و $(0,-1,-1)$ و $(1,m,2)$ وابسته خطی‌اند. m کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۴۸۰- فاصله دو صفحه به معادله $x+y+z=1$ و $2x+2y+2z=3$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۴۸۱- خط به معادله $2x=y-1=3z$ با صفحه‌ای به معادله $2x-2y+3z=2$ کدام وضع را دارد؟

۱) عمود ۲) خط در صفحه قرار دارد

۳) موازی ۴) مایل

۴۸۲- تابع خطی $f: R^2 \to R^2$ با ضابطه $f(x,y)=(x-y,0)$ ...

۱) پوشا است و یک به یک نیست.

۲) پوشا و یک به یک است.

۳) پوشا نیست و یک به یک نیست.

۴)یک به یک است و پوشا نیست.

۴۸۳- $f: R^2 \to R^3$ و $g: R^2 \to R^n$ دو نگاشت خطی می‌باشند. به ازای کدام مقدار n نگاشت gof موجود است؟

۱) $n=1$ ۲) $n=2$ ۳) $n=3$ ۴) هیچ مقدار n

۴۸۴- اگر $f: R^2 \to R^3$ با ضابطه $f(x,y)=(x-y,y-x,0)$ باشد، هسته f کدام مجموعه است؟

۱) $\{(x,y): x=0\}$ ۲) $\{(x,y): y=0\}$

۳) $\{(x,y): y=x\}$ ۴) $\{(x,y): y+x=0\}$

۴۸۵- اگر a, b دو عدد صحیح و $p \mid ab$ و $37p-29a=1$، کوچکترین عضو مثبت مجموعه $\{mp+nb : m,n \in Z\}$ کدام است؟

۱) b ۲) p ۳) ۱ ۴) ۸

۴۸۶- نسبت دو عدد صحیح $\frac{۴}{۹}$ و کوچکترین مضرب مشترک آنها ۶۱۲ می‌باشد، بزرگترین شمارنده آنها کدام است؟ (شمارنده=مقسوم علیه مشترک)

۱) ۱۷ ۲) ۳۴ ۳) ۵۱ ۴) ۶۸

۴۸۷- مختصات تبدیل نقطه $A(1,-1)$ تحت ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $(-1,-4)$ ۲) $(-4,-1)$

۳) $(-4,1)$ ۴) $(1,-4)$

۴۸۸- اگر $A=\begin{vmatrix} -a & b & 0 \\ -1 & -b & a \\ a & -b & b \end{vmatrix}$ مقدار $\begin{vmatrix} b-a & 1 & 0 \\ -b-1 & -1 & 2a \\ a-b & -1 & 2b \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{b}A$ ۲) $-2bA$ ۳) $2bA$ ۴) $\frac{2}{b}A$

۴۸۹- همسازه سطر دوم و ستون سوم ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۲) ۳ ۳) ۲- ۴) ۳-

۴۹۰- ستون چهارم ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix}$ مـــقادیرثابت یک دستگاه معادله خطی سه مجهولی و ماتریس حاصل از حذف ستون چهارم، ماتریس ضرایب این دستگاه است. مجموع جوابهای این دستگاه کدام است؟

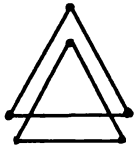
۱) ۵- ۲) ۴- ۳) ۴ ۴) ۵

♣ ۴۹۱- کدام دنباله می‌تواند، دنباله درجه‌های رأسهای یک گراف باشد؟

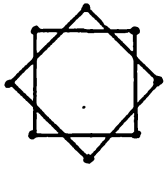
۱) ۰و۲و۳و۴و۵ ۲) ۰و۲و۲و۳و۳

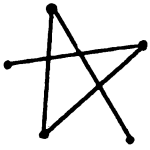
۳) ۰و۲و۲و۳و۴ ۴) ۰و۲و۳و۳و۵

♣ ۴۹۲- کدام گراف همبند است؟

۱) 

۲)

۳) 

۴) 

**۴۹۳*- تعداد جوابهای صحیح معادله $x_1+x_2+x_3=8$، به طوری که $0 \le x_i \le 4$ و $i=1$ و ۲ و ۳ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

**۴۹۴*- در رابطه بازگشتی $a_{n+2}=a_{n+1}-\frac{1}{4}a_n$; $a_0=1$, $a_1=\frac{3}{2}$ مقدار a_8 چقدر است؟

۱) $\frac{15}{216}$ ۲) $\frac{19}{216}$ ۳) $\frac{15}{256}$ ۴) $\frac{17}{256}$

۴۹۵- دو ظرف داریم، اولی شامل ۲ مهره سفید و ۱ مهره سیاه و دومی شامل ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است، از ظرف اول به تصادف یک مهره برداشته و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس از ظرف دوم مهره‌ای برمی‌داریم. احتمال آنکه این مهره سفید باشد، کدام است،

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷

۴۹۶- یک امتحان برنولی را مستقلاً و متوالیاً تکرار می‌کنیم، احتمال پیروزی در هر آزمایش ۰/۲ است. میانگین شماره‌هایی که برای اولین بار پیروزی حاصل می‌شود کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۵ ۴) ۴

**۴۹۷*- اگر مقادیر متغیر تصادفی x را از امید ریاضی آنها کم کنیم، امید ریاضی متغیرهای جدید ...

۱) صفر می‌شود. ۲) نصف می‌شود.

۳) تغییر نمی‌کند. ۴) تغییر علامت می‌دهد.

سؤالات کنکور پیش دانشگاهی ۷۶-۷۵

۴۹۸- نمودارهای دو تابع با ضابطه $y=sinx$, $\pi y=2x$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۹۹- برد تابع با ضابطه $f(x)=\frac{|x|-1}{|x|+1}$ در کدام فاصله است؟

۱) $(-1,1]$ ۲) $[-1,1]$

۳) $R-(-1,1)$ ۴) $[-1,+\infty)$

۵۰۰- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-3x-1=0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به صورت $\left\{\frac{\alpha^2}{\beta},\frac{\beta^2}{\alpha}\right\}$ است؟

۱) $2x^2+5x-1=0$ ۲) $4x^2+5x-2=0$

۳) $4x^2-5x-2=0$ ۴) $2x^2-5x-1=0$

۵۰۱- در تابع $f(x)=\begin{cases} cotg\frac{\pi}{4}x & x<1 \\ \sqrt{x^2+1} & x\geq 1 \end{cases}$ مقدار $(fof)(\frac{2}{3})$ کدام‌است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۰۲- مجموعه نقاط تلاقی نمودارهای f و f^{-1} نسبت به کدام خط متقارن هستند؟

۱) نیمساز ربع اول
۲) محور xها
۳) محور yها
۴) نیمساز ربع دوم

۵۰۳- توابع با ضابطهٔ $g(x)=sinx \quad (|x|\leq\frac{\pi}{۲})$ و $f(x)=\frac{۱+x}{۱-x}$ مفروض‌اند. ضابطه معکوس تابع fog کدام است؟

۱) $\frac{۱-sinx}{۱+sinx}$
۲) $\frac{sinx-۱}{sinx+۱}$
۳) $Arc\ sin\ \frac{x+۱}{x-۱}$
۴) $Arc\ sin\ \frac{x-۱}{x+۱}$

۵۰۴- حد $\frac{|x^۳-۸|}{x-\sqrt{۲x}}$ وقتی $x\to۲^-$ کدام است؟

۱) -۲۴
۲) -۱۶
۳) ۱۶
۴) ۲۴

۵۰۵- حد $\frac{tan۲x}{\sqrt{۱-cosx}}$ وقتی $x\to۰^-$ کدام است؟

۱) $-۲\sqrt{۲}$
۲) $-\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۲}$

۵۰۶- نقطه تلاقی مجانب‌های افقی و قائم نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{۲x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{۲x}+۳}$ کدام است؟

۱) $(-۱,۱)$
۲) $(-۱,۲)$
۳) $(۳,۱)$
۴) $(۳,۲)$

۵۰۷- به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع با ضابطه $y=\frac{ax-۵x}{۳x^۲+ax+a-۳}$ همواره پیوسته است.

۱) $\{a: ۱<a<۳\}$
۲) $\{a: a>۳\}$
۳) ϕ
۴) R

۵۰۸- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{|x-1|}{x^2-1} & x<1\\ [x]+a & x\geq 1\end{cases}$ در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۵۰۹- اگر $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=-\frac{2}{3}$ مقدار $\left(f(\sqrt{x-1})\right)'$ در نقطهٔ $x=5$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۵۱۰- عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{\sqrt{2x}}{1-x}$ در نقطه $x=2$ واقع بر آن کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۵ ۳) -۱ ۴) ۲

۵۱۱[1]- به ازای کدام مقادیر a, b تابع با ضابطهٔ $y=ax+b+\frac{2x^2}{x-1}$، یک تابع هموگرافیک است که مرکز تقارن نمودار آن روی نیمساز ناحیه اول قرار دارد؟

۱) $a=-2, b=-1$ ۲) $a=2, b=-1$

۳) $a=-2, b=1$ ۴) $a=2, b=1$

۵۱۲- به کدام دلیل تابع با ضابطهٔ $y=|x|$ در نقطه $x=0$ مشتقپذیر نیست؟

۱) مشتق چپ ندارد

۲) مشتق راست ندارد

۳) مشتق چپ و مشتق راست ندارد

۴) مشتق چپ و راست دارد ولی برابر نیستند.

---

[1] در صورت آزمون اصلاح بعمل آمده است.

۵۱۳- تابع با ضابطهٔ $y=\begin{cases} sinx & x>\frac{\pi}{۴} \\ -cosx & x\leq\frac{\pi}{۴} \end{cases}$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۴}$ کدام وضع را دارد؟

۱) پیوسته است و مشتق‌پذیر نیست.

۲) پیوسته نیست و مشتق‌پذیر نیست.

۳) پیوسته و مشتق‌پذیر است.

۴) مشتق‌پذیر راست و مشتق‌پذیر چپ ولی پیوسته نیست.

۵۱۴- تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x>۱ \\ ۲x-۱ & x\leq ۱ \end{cases}$ در نقطه $x=۱$ ...

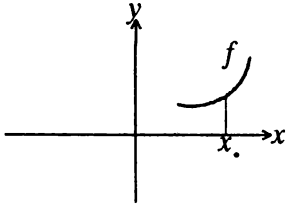
۱) پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.

۲) پیوسته و مشتق‌پذیر است.

۳) مشتق‌پذیر است و می‌نیمم دارد.

۴) نقطه بحرانی دارد.

۵۱۵- وضع f' و f'' در نقطه $x_۰$ بر طبق شکل مقابل به کدام صورت است؟



۱) $f'(x_۰)<۰\ ,\ f''(x_۰)<۰$

۲) $f'(x_۰)<۰\ ,\ f''(x_۰)>۰$

۳) $f'(x_۰)>۰\ ,\ f''(x_۰)>۰$

۴) $f'(x_۰)>۰\ ,\ f''(x_۰)<۰$

۵۱۶- نقطه $x=۰$ برای تابع با ضابطهٔ $y=x^۵$ چه نوع نقطه‌ای است؟

۱) ساده ۲) عطف

۳) ماکزیمم ۴) می‌نیمم

۵۱۷- دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $y=tan^{۲}ax$ ، دو برابر دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $y=sin^{۲}\frac{۳x}{۲}$ است. a کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۵۱۸- کمترین فاصلهٔ مبدأ مختصات از نقاط روی نمودار تابع $۲y=x^{۲}-۵$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

***۵۱۹-** مقدار $\lim_{h\to ۰}(۱+۲h)^{\frac{۲}{h}}$ کدام است؟

۱) $۲e$ ۲) $۴e$ ۳) $e^{۲}$ ۴) $e^{۴}$

***۵۲۰-** ضریب زاویهٔ خط مماس بر نمودار تابع $y=e^{Arccosx}$ در نقطه $x=۰$ کدام است؟

۱) $e^{\frac{\pi}{۲}}$ ۲) $۲e^{\frac{\pi}{۲}}$ ۳) $-e^{\frac{\pi}{۲}}$ ۴) $-۲e^{\frac{\pi}{۲}}$

۵۲۱- طول وتری که دایرهٔ به معادله $x^{۲}+y^{۲}-۲x=\frac{۱۹}{۵}$ از خط به معادلهٔ $y=۲x$ جدا می‌کند، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۲۲- معادلهٔ خط قائم بر هذلولی به معادلهٔ $۳x^{۲}-۲y^{۲}=۱$ در نقطه $(۱,۱)$ کدام است؟

۱) $y+۲x=۳$ ۲) $۲y+x=۳$

۳) $۲y+۳x=۵$ ۴) $۳y+۲x=۵$

***۵۲۳-** نرخ تغییر تابع با ضابطهٔ $\int_{۰}^{x}t^{۲}dt$ در نقطهٔ $x=۱$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۵۲۴- حاصل $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [sinx]dx$ کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{2}$ ۲) -1 ۳) 1 ۴) $\frac{\pi}{2}$

۵۲۵- حاصل $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{\pi}{12}$

۵۲۶- با توجه به رابطهٔ بین اعداد زیر هر شکل با همان شکل،

۱+۲+۲+۱=۲×۳

۱+۲+۳+۳+۲+۱=۳×۴

مجموع «۱+۲+۳+...+۱۰۱+۱۰۱+...+۳+۲+۱» کدام است؟

۱) ۱۰۲۰۰ ۲) ۱۰۳۰۲

۳) ۱۰۱۰۱ ۴) ۱۰۱۰۰

۵۲۷- در استدلال یک قضیه ، فرض کرده‌ایم که حکم برقرار باشد و پس از یک دسته از اعمال مجاز به یک رابطهٔ بدیهی و یا فرض قضیه رسیده‌ایم برای تکمیل اثبات لازم است کدام مورد برقرار باشد؟

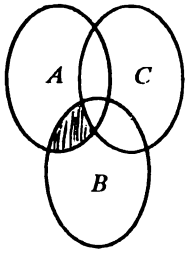
۱) اثبات قضیه کامل است و نیاز به فرض دیگری نیست.

۲) مراحل انجام شده بازگشت پذیر باشند.

۳) یک مثال که در شرایط قضیه صدق و از آن حکم قضیه نتیجه شود مورد نیاز است.

۴) یک مثال نقض ارائه شود.

۵۲۸- قسمت هاشورزده شکل مقابل تصویر ون کدام مجموعه است؟



۱) $A-(B\cap C)$

۲) $A\cap(C-B)$

۳) $A\cap(B-C)$

۴) $(A\cap C)-B$

۵۲۹- اگر $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{a,d,f\}$ آنگاه $A\times B-B^2$ چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۵۳۰- رابطه $(a,b)R(c,d)$ با کدام تعریف روی N^2 یک رابطه هم‌ارزی نیست؟

۱) $ab=cd$ ۲) $ad=bc$

۳) $a+c=b+d$ ۴) $a+d=b+c$

۵۳۱- باقیماندهٔ تقسیم عدد 3^{20} بر عدد ۱۷ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۲

۳) ۵ ۴) ۴

۵۳۲- بر روی دایره‌ای به شعاع ۵ واحد نقطه ثابت A مفروض است. دو نقطه B و C را بطور تصادف بر روی دایره اختیار می‌کنیم، احتمال اینکه کمان $\overset{\frown}{BAC}$ کوچکتر از نیم دایره باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{5}$

۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۵۳۳- اگر A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه‌ای S باشند، بطوری $P(A)=\frac{۲}{۴}$ و $P(B)=\frac{۱}{۳}$ احتمال اینکه هیچ یک از دو پیشامد A یا B روی ندهد، کدام است،

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۵۳۴- از بین ۷ دانش‌آموز تیزهوش رشته ریاضی و ۵ دانش‌آموز تیزهوش رشته تجربی ۴ نفر به طور تصادفی جهت مسابقه‌ای انتخاب شده‌اند. احتمال اینکه لااقل سه نفر آنان از رشته ریاضی باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۳۳}$ ۲) $\frac{۱۴}{۳۳}$

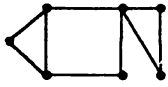
۳) $\frac{۱۵}{۲۲}$ ۴) $\frac{۱۲}{۲۲}$

۵۳۵- در یک آزمایش تصادفی فضای نمونه‌ای $S=\{a,b,c\}$ و $P(a)=۳P(b)=\frac{۳}{۲}P(c)$ احتمال وقوع پیشامد $\{b,c\}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۵۳۶- ماکزیمم تعداد اعضاء دورهای گراف نمودار مقابل کدام است؟



۱) ۷ ۲) ۶

۳) ۵ ۴) ۴

۵۳۷- اگر $z=\sqrt{۳}-i$ ، حاصل $\frac{z^۶}{z\,.\,\bar{z}}$ کدام است؟

۱) ۱۶- ۲) ۸- ۳) ۸ ۴) ۱۶

سؤالات کنکور مرحله دوم ۷۶-۷۵

۵۳۸- دو برابر مقدار مثبتی از ثلث مربع آن مقدار ۹ واحد کمتر است. این مقدار، کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

۵۳۹- اگر $a+b$ ، حاصل $۲a^۲+۴b^۲-۴ab-۲a+۱=۰$ ، کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۵۴۰- تعدادی لیوان را در جعبه‌های ۱۶تایی بسته بندی کرده‌ایم. ۳ لیوان باقیمانده است. همان تعداد لیوان را در جعبه‌های ۲۸تایی بسته‌بندی کرده‌ایم، همان ۳ لیوان باقی مانده است. حداقل تعداد لیوانها، کدام است؟

۱) ۱۰۸ ۲) ۱۱۲ ۳) ۱۱۵ ۴) ۱۲۰

۵۴۱- در تجزیه عبارت $x^۲+x(-۲y-۱)+(-۳y+۱)(y-۲)$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) $x-y-۲$ ۲) $x-y+۲$ ۳) $x+y+۲$ ۴) $x+y-۲$

۵۴۲- یک ضلع مربعی منطبق بر خط به معادله $y=x+۲$ و نقطه $A(۳,-۱)$ یک رأس آن است. اندازه قطر مربع کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۳

۵۴۳- تعداد جوابهای معادله $\frac{x-۲}{x+۲}+\frac{x}{x-۲}=\frac{۸}{x^۲-۴}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۴۴- در یک تصاعد هندسی نزولی نامحدود جمله اول برابر با نصف مجموع جملات بعدی است، جمله اول چند برابر جمله سوم است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۵۴۵- از تساوی $log_{۹}(x-۴)=۱-log_{۳}۲$ ، مقدار x کدام است؟

۱) ۶/۲۵ ۲) ۶/۵ ۳) ۶/۷۵ ۴) ۷/۵

۵۴۶- مساحت محدود به نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۳-|x|$ و محور xها، کدام است؟

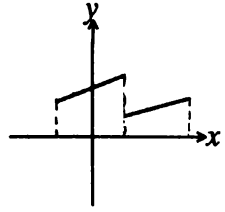
۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

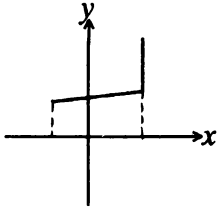
۵۴۷[۱]- به ازای کدام مقادیر a ، عبارت $ax^{۲}+۲x+۴a$ همواره مثبت است؟

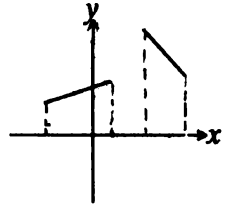
۱) $a>\frac{۱}{۲}$ ۲) $a\leq-\frac{۱}{۲}$

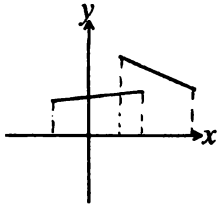
۳) $۰\leq a\leq\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}\leq a\leq\frac{۱}{۲}$

۵۴۸- کدام شکل، نمودار یک تابع است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۵۴۹- باقیمانده تقسیم عبارت $x^{۴}+ax^{۳}+bx^{۲}+x+۱$ بر $x^{۲}-۱$ برابر صفر

[۱] در صورت آزمون اصلاح بعمل آمده است.

است. b کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۵۰- حاصل $\frac{sin۱۰x-sin۶x}{cos۱۰x+cos۶x}$ کدام است؟

۱) $tan۲x$ ۲) $cot۲x$

۳) $tan۴x$ ۴) $cot۴x$

۵۵۱- اگر $tan(\frac{۳\pi}{۲}-x) = cot(a+x)$ ، a کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) π ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

۵۵۲- حد عبارت $\frac{\sqrt{cosx}-\sqrt{cos۲x}}{x^۲}$ وقتی $x\to ۰$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۵۵۳- در معادلهٔ مثلثاتی $-sinx+\sqrt{۳}cosx= ۱$ ، یکی از صورتهای کلی جواب ، کدام است؟

۱) $۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}$ ۲) $۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳}$

۳) $۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi+\frac{\pi}{۶}$

۵۵۴- به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع با ضابطه $\dot{f}(x)=\begin{cases}[[x]-x] & x\notin Z\\ a & x\in Z\end{cases}$ همواره پیوسته است؟

۱) ϕ ۲) $\{-۱\}$ ۳) $\{۰\}$ ۴) $\{۱\}$

۵۵۵- پاره خط AB به اندازه ۱۶ واحد در صفحه محورهای مختصات چنان می‌لغزد که همواره دو سر آن ، A و B بر روی محورهای مختصات قرار دارند. معادله مکان هندسی نقطه $M(x,y)$ وسط AB کدام است؟

۱) $|x|+|y|=۸$ ۲) $|x|\pm|y|=۸$

۳) $x^۲+y^۲=۶۴$ ۴) $xy+۴(x+y)=۱۶$

۵۵۶- اگر $f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$ و $g(x)=f(\frac{۱}{x})$، مقدار $g(\frac{۳}{۴})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱۵}{۱۶}$ ۳) $-\frac{۱۵}{۱۶}$ ۴) $-\frac{۱۶}{۱۵}$

۵۵۷- انتگرال $\int(\frac{sin۳x}{cosx}+tanx)dx$ برابر کدام است؟

۱) $-cos۲x+c$ ۲) $sin۲x+c$

۳) $۳sin^۲x+c$ ۴) $۳cos^۲x+c$

۵۵۸- ناحیه محصور بین نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶-x^۲}$ و خط $y=\sqrt{۳}$ را حول محور xها دوران می‌دهیم. حجم حاصل کدام است؟

۱) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۷\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۸\pi}{۳}$ $\frac{۱۶\pi}{۳}$

۵۵۹- دو زاویه A و B متمم‌اند. اندازه زاویه A برابر $\frac{۴}{۹}$ اندازه مکمل زاویه B است. زاویه A چند درجه است؟

۱) ۲۷ ۲) ۳۶ ۳) ۶۳ ۴) ۷۲

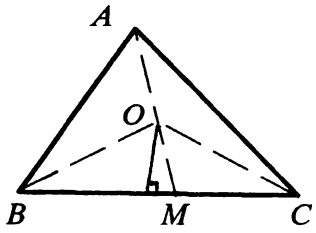
۵۶۰- تعداد قطرهای یک n ضلعی دو برابر تعداد اضلاع آن است. n کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۵۶۱- اندازه زاویه درونی یک ۸ ضلعی منتظم، کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۳۵ ۳) ۱۵۰ ۴) ۲۱۰

۵۶۲- در شکل مقابل، مساحت مثلثهای



ABC و OBC را به ترتیب S و S' می‌نامیم. نسبت $\frac{OM}{AM}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{S'}{S}}$ ۲) $(\frac{S'}{S})^{۲}$

۳) $\frac{S-S'}{S}$ ۴) $\frac{S'}{S}$

۵۶۳- در مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{۳}$ واحد، طول خط المرکزین دو دایره محیطی و محاطی خارجی آن کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۵۶۴- در مثلث ABC داریم $c = ۳b-۱$ و $a = ۲b = ۶$، نیمساز خارجی زاویه A، امتداد ضلع مقابل را در D قطع کرده است. اندازه DC کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۳/۶ ۳) ۳/۷ ۴) ۲/۸

۵۶۵- مساحت تصویر یک مستطیل روی یک صفحه، نصف مساحت مستطیل است. زاویه صفحه مستطیل با صفحه تصویر کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۵۶۶- چهار ضلعی حاصل از تقاطع نیمسازهای زوایای داخلی هر مستطیل همواره کدام است؟

۱) لوزی ۲) مربع

۳) مستطیل ۴) متوازی‌الاضلاع

۵۶۷- صفحه‌ای موازی قاعده هرم، ارتفاع آن را نصف می‌کند. حجم هرم حاصل، چه کسری از حجم هرم اولیه است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۵۶۸- دو بردار غیر صفر a و b بر هم عمودند اگر و تنها اگر ... (نماد × به

مفهوم ضرب خارجی است.)

۱) $\vec{a}.\vec{b}=0$ ۲) $\vec{a}.\vec{b}=1$ ۳) $\vec{a}\times\vec{b}=0$ ۴) $\vec{a}\times\vec{b}=1$

۵۶۹- خط به معادلهٔ $\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t \\ z=-t \end{cases}$ موازی صفحه $mx+y-z=2$ است. m کدام است؟

۱) -4 ۲) -3 ۳) 3 ۴) 4

۵۷۰- فاصلهٔ مبدأ از صفحهٔ به معادلهٔ $x+y=1$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) 1 ۳) $\sqrt{2}$ ۴) 2

۵۷۱- از نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ دو مماس عمود برهم بر سهمی به معادلهٔ $y^2-4x=0$ رسم شده است. α کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۵۷۲- به ازای کدام مقدار a، نقطه $A(0,1)$ یکی از رأسهای کانونی بیضی به معادلهٔ $y^2+4x^2-2ay=15$ است؟

۱) -7 ۲) -5 ۳) 3 ۴) 4

۵۷۳- خط $y+2x=3$ مجانب هذلولی با رأس $A(1,-1)$ و محور کانونی موازی محور عرض‌هاست. معادله مجانب دیگر هذلولی کدام است؟

۱) $y=2x-3$ ۲) $y=2x+3$

۳) $y=2x-1$ ۴) $y=-2x+1$

۵۷۴- اگر $\binom{n}{7}=2\binom{n}{8}$، آنگاه n کدام است؟

۱) 18 ۲) 19 ۳) 20 ۴) 23

۵۷۵- اگر $A=\{2k-1 \mid k\in Z, 0\le k\le 2\}$ و $B=\{x \mid x\in N, x^2\le 9\}$، تعداد زیر مجموعه‌های، مجموعهٔ B^2-A^2 کدام است؟

۱) 8 ۲) 16 ۳) 32 ۴) 64

۵۷۶- باقیمانده تقسیم عدد طبیعی a بر عدد ۲۹ برابر ۱۲ است. اگر $a+۱۷$ مضرب ۲۱ باشد، رقم وسط کوچکترین عدد a، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۵۷۷- اگر a, b, c اعداد طبیعی و $a \mid bc$ و $a \nmid b$ آنگاه همواره ...

۱) $(b,c) \mid a$ ۲) $a \mid (b,c)$

۳) $a \mid [b,bc]$ ۴) $(b,bc) \mid a$

۵۷۸- رابطه $R=\{(x,y) \mid x, y \in Z, m \mid x-y\}$، مجموعه Z را به ۵ کلاس هم‌ارزی افراز کرده است. کدام دو عدد در یک کلاس هم‌ارزی قرار دارند؟

۱) ۲۵ و ۷ ۲) ۳۱ و ۳ ۳) ۳۷ و ۱ ۴) ۳۷ و ۱۲

۵۷۹- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، حاصل $P(A') - P(A \cap B)$ - ۱ برابر کدام است؟

۱) $P(B)$ ۲) $P(B')$

۳) $P(A \cap B')$ ۴) $P(A' \cap B)$

۵۸۰- در ظرفی پنج مهره به شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ ریخته‌ایم. دو مهره به تصادف با هم از ظرف بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه مجموع شماره‌ها بزرگتر از ۵ باشد، کدام است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷

۵۸۱- به ازای کدام مقدار m، سه بردار $(۱, ۱, ۲)$ و $(۱, m, -۱)$ و $(۳, ۱, -۱)$ وابسته خطی‌اند؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

۵۸۲- تبدیل یافته نقطه $(۴,۲)$ به‌کمک ماتریس دوران $R_{۶۰}$ و سپس ماتریس تقارن نسبت به نیمساز ربع دوم نقطه (x,y) است ، y کدام است؟

۱) $-۲+\sqrt{۳}$ ۲) $-۱+۲\sqrt{۳}$ ۳) $۱-۲\sqrt{۳}$ ۴) $۲-\sqrt{۳}$

۵۸۳- حاصلضرب ترانهاده ماتریس A در ماتریس همانی ، برابر ماتریس A است. الزاماً ماتریس A کدام نوع است؟

۱) بالا مثلثی ۲) متقارن

۳) مربع ۴) قطری

۵۸۴- اگر $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ، آنگاه $x+y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

♣ **۵۸۵-** آهنگ آنی تغییر مساحت یک دایره نسبت به شعاع r در $r_۰=۱۰$ کدام است؟

۱) ۱۰π ۲) ۱۵π ۳) ۲۵π ۴) ۲۰π

۵۸۶- وضع نمودار تابع $y=۲^{x-۱}$ ، کدام است؟

۱) همواره صعودی است.

۲) همواره نزولی است.

۳) برای $x>۱$ صعودی و برای $x<۱$ نزولی است.

۴) برای $x>۱$ نزولی و برای $x<۱$ صعودی است.

۵۸۷- مقدار $\sum_{k=۴}^{\infty} \frac{۱}{(k-۲)(k-۳)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۵۸۸- مقدار $\int_{0}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۵۸۹- برای کدام مقادیر عدد صحیح n نامساوی $\left|\frac{n+1}{n-2}-1\right| < \frac{1}{10}$ برقرار است؟

۱) $n<-28$ و $n>32$ ۲) $n<-31$ و $n>31$

۳) $n<-31$ و $n>29$ ۴) $n<-32$ و $n>28$

♣ **۵۹۰**- کدام دنباله از اعداد صعودی است؟

۱) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ ۲) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$

۳) $\left\{\frac{n^3}{2^n}\right\}$ ۴) $\left\{\frac{2^n}{n^3}\right\}$

♣ **۵۹۱**- اگر اجتماع دو همسایگی باز متقارن یک عدد، یک همسایگی باز متقارن آن عدد شده باشد، آنگاه...

۱) اشتراک دو همسایگی تهی است.

۲) اشتراک دو همسایگی برابر یکی از آنهاست.

۳) دو همسایگی برابرند.

۴) یکی از دو همسایگی تهی است.

♣ **۵۹۲**- مقدار $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x^2+1}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $\frac{1}{2}$

♣ **۵۹۳**- ذره‌ای بر روی مسیر $y=2\cos^2 x-1$ حرکت می‌کند. در نقطه‌ای با کدام طول، سرعت مؤلفه x آن برابر سرعت مؤلفه y آن است؟

۱) $\frac{5\pi}{6}$ ۲) $\frac{5\pi}{12}$ ۳) $\frac{7\pi}{12}$ ۴) $\frac{7\pi}{6}$

۵۹۴*- مقدار مشتق عبارت $Arctan(e^{-x})$ در $x=0$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۵۹۵ - هر دو دایره با شعاعهای مساوی، با کدام تبدیلات زیر برهم منطبق می‌شوند؟

۱) یک انتقال-یک تقارن مرکزی

۲) یک انتقال و یک تجانس مستقیم

۳) یک تقارن مرکزی و یک تجانس مستقیم

۴) دو تجانس مستقیم و معکوس

۵۹۶*- اگر عدد مختلط $-1-i$ را بصورت قطبی بیان کنیم، زاویه قطبی این عدد کدام است؟

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) $\frac{4\pi}{3}$

۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$

۵۹۷- اگر f و g توابعی بر R^2 به صورت $f(x,y)=(x+y,x-y)$ و $g(x,y)=(2x+y,y)$ باشند، $\frac{1}{2}(fog)(x,y)$ کدام است؟

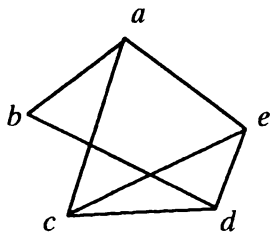
۱) $(x-y,x)$ ۲) $(x+y,x)$

۳) $(y,x+y)$ ۴) $(y,x-y)$

۵۹۸*- در گراف سادهٔ $G=(V,E)$، $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ و $E(G)$ پانزده عضو دارد. از هر عضو V حداقل چند یال می‌گذرد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

*۵۹۹- در گراف شکل مقابل چند مسیر به طول ۳ از a به e وجود دارد؟



۱) ۵ ۲) ۴

۳) ۳ ۴) ۲

۶۰۰- تعداد اعداد صحیح و مثبت نابیشتر از ۲۳۱ و غیراول با آن کدام است؟

۱) ۱۱۴ ۲) ۱۱۱ ۳) ۱۰۷ ۴) ۱۰۳

۶۰۱- دو نقطه به طور تصادفی دربازهٔ $(۰,۲)$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه فاصله آن دو نقطه کمتر از ۱ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

*۶۰۲- جدول مقابل ، توزیع احتمال متغیر تصادفی x است. اگر امید ریاضی x برابر ۵ باشد ، x کدام است؟

x_i	۱	۳	۷	x
p_i	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۶}$	a

۱) ۹ ۲) ۱۱

۳) ۱۲ ۴) ۱۳

سوالات کنکور پیش دانشگاهی ۷۷-۷۶

۶۰۳- نماد متعارفی عدد $۰/\overline{۵۹۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۱}{۳۷}$ ۲) $\frac{۲۲}{۳۷}$ ۳) $\frac{۲۷}{۴۹}$ ۴) $\frac{۲۹}{۴۹}$

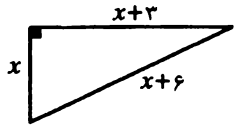
۶۰۴- اگر $(x+۴)(x^۲+Ax+۱۶)$ به صورت $x^۳+B^۳$ باشد، A کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

۶۰۵- اگر $\begin{cases} y=|x| \\ x+y=-۳ \end{cases}$ ، مقدار $x+۲y$ کدام است؟

۱) $-۱/۵$ ۲) $-۲/۵$ ۳) $-۳/۵$ ۴) هیچکدام

۶۰۶- در شکل مقابل طول ارتفاع وارد بر وتر مثلث کدام است؟



۱) ۷/۲ ۲) ۷/۳

۳) ۷/۴ ۴) ۷/۵

۶۰۷- حاصل $۳cos۳۰^\circ - ۴cos^۳۳۰^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{-۱}{۲}$ ۲) صفر ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۶۰۸- به ازای اعضای کدام مجموعه ، کسر $\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}$ از ۲ کمتر است؟

۱) R ۲) ϕ

۳) $\{x: -۱<x<۱\}$ ۴) $\{x: x<-۱\}$

۶۰۹- کدام رابطهٔ با ضابطهٔ زیر یک تابع یک به یک است؟

۱) $|y|=x$ $\quad 0<x<1$ $\quad$ ۲) $|y|=|x|$ $\quad 0<x<1$

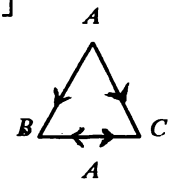
۳) $y=|\sin x|$ $\quad \frac{-\pi}{2}<x<0$ $\quad$ ۴) $y=|x|$ $\quad -1<x<1$

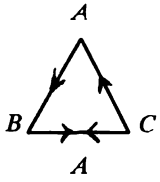
۶۱۰- معادله قرینهٔ خط Δ با معادله $y+2x=1$ نسبت به محور xها کدام است؟

۱) $y=-2x-1$ $\quad$ ۲) $2y=x-1$

۳) $y=2x-1$ $\quad$ ۴) $2y=x+1$

۶۱۱- شبکه ماتریس $\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳)

۴)

۶۱۲- برد تابع با ضابطه $y=[\sin x]+[\cos x]$ چند عضو دارد؟

۱) ۲ $\quad$ ۲) ۳ $\quad$ ۳) ۴ $\quad$ ۴) بیش از ۴

۶۱۳- اگر $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ $\quad$ ۲) ۲ $\quad$ ۳) ۳ $\quad$ ۴) ۴

۶۱۴- هشت گلدان با گلهای مختلف را به چند صورت می‌توان در دو کناره هر یک از ۴ پله قرار داد؟

۱) ۴۰۳۲۰ ۲) ۸۴۰۰

۳) ۶۷۲۰ ۴) ۱۲۲۴

۶۱۵- با ارقام ۵،۳،۲،۱،۰ چند عدد سه رقمی کوچکتر از ۴۰۰ می‌توان نوشت؟ (تکرار رقم‌ها مجاز نیست.)

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۲

۶۱۶- نقطه میانی بازهٔ $\left[-\frac{۲}{۳} , \frac{۵}{۶} \right]$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۶۱۷- اگر $f(x)=۲x-۱$ ضابطهٔ تابع $g=(f+۲f)of$ کدام است؟

۱) $g(x)=۶x-۶$ ۲) $g(x)=۶x-۹$

۳) $g(x)=۱۲x-۶$ ۴) $g(x)=۱۲x-۹$

۶۱۸- کدام تابع با ضابطهٔ زیر در دامنه‌اش صعودی است؟

۱) $f(x)=|x|$ ۲) $f(x)=x|x|$

۳) $f(x)=\frac{۱}{x}$ ۴) $f(x)=\frac{۱}{|x|}$

۶۱۹- اگر $f(x)=\frac{۲x}{|۲x|+۲}$ آنگاه $\lim_{x\to ۱^-} f(x) - \lim_{x\to ۱^+} f(x)$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ∞

۶۲۰- حاصل $\lim_{h\to ۰} \frac{\sqrt[۳]{۸+h}-۲}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{-۱}{۲}$ ۲) $\frac{-۱}{۶}$ ۳) $\frac{-۱}{۸}$ ۴) $\frac{-۱}{۱۲}$

۶۲۱- اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g'(۲)=-۳$ ، مقدار $(gof)'(۴)$ کدام است؟

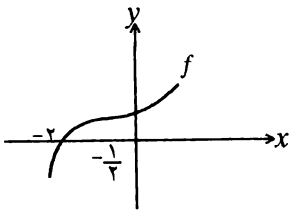
۱) $\frac{-۴}{۳}$ ۲) $\frac{-۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

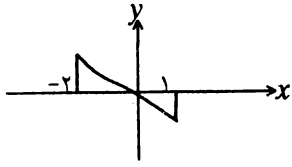
۶۲۲- آهنگ آنی تغییر حجم یک بادکنک کروی شکل در موقع دمیدن باد نسبت به شعاع آن وقتی شعاع بادکنک ۵ سانتیمتر باشد کدام است؟

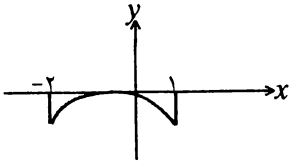
۱) 25π ۲) 50π

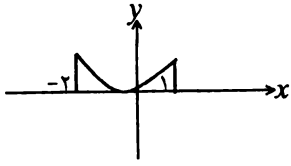
۳) 75π ۴) 100π

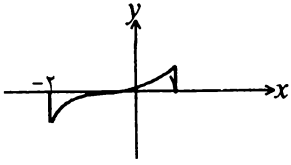
۶۲۳- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ وقتی $-2\leq x\leq 1$ به صورت شکل مقابل باشد، نمودار تابع با ضابطهٔ $y'=f'(x)$ بر این بازه به کدام صورت است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۶۲۴- مقدار مشتق عبارت $Arc\ cot\frac{1}{x}$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{-\pi}{2}$ ۲) $\frac{-1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۶۲۵- صفحه Δ یک سطح مخروطی دوار را طوری قطع نموده است که مقطع همواره از دو قسمت مجزا تشکیل شده است. وضع صفحه Δ نسبت به این سطح مخروطی کدام است؟

۱) به موازات محور ۲) به موازات مولد

۳) عمود بر مولد ۴) گذرنده از رأس

۶۲۶- معادلهٔ خط هادی سهمی به معادلهٔ $y^2-2y+4x=7$ کدام است؟

۱) $x=-3$ ۲) $x=-2$

۳) $x=2$ ۴) $x=3$

۶۲۷- حاصل $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

۶۲۸- در یک چهارضلعی دو قطر برابر و دو ضلع روبرو مساوی‌اند. الزاماً کدام گزاره در مورد این چهارضلعی درست است؟

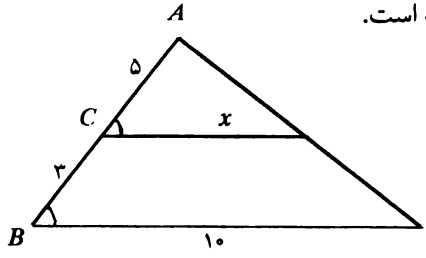
۱) دو قطر عمود برهم‌اند.

۲) دو قطر با یک نسبت متقاطع‌اند.

۳) دو زاویه مقابل مساوی‌اند.

۴) تفاضل دو زاویه مقابل یک قائمه است.

۶۲۹- در شکل مقابل $\angle C = \angle B$،



x کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۶/۲۵

۳) ۶/۵ ۴) ۶/۷۵

۶۳۰- طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۶ واحد است، مجموع مربعات میانه‌های نظیر اضلاع قائم مثلث کدام است؟

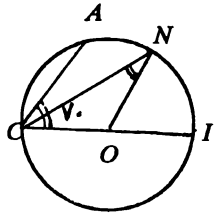
۱) ۴۰ ۲) ۴۲ ۳) ۴۵ ۴) ۴۸

۶۳۱- کره‌ای به شعاع ۶ واحد بر صفحه‌ای مماس است مساحت مقطع آن با صفحه‌ای به فاصله ۲ واحد از صفحه مماس چقدر است؟

۱) 20π ۲) 18π ۳) 16π ۴) 12π

۶۳۲- طول وتری از یک دایره که فاصله‌اش از مرکز دایره نصف شعاع دایره است، چند برابر شعاع دایره است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۱/۵ ۴) ۱/۷۵



۶۳۳- در شکل مقابل $CA \parallel ON$، زاویهٔ CNO چند درجه است؟

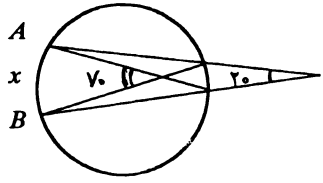
۱) ۲۷/۵ ۲) ۳۰

۳) ۳۵ ۴) ۳۲/۵

۶۳۴- طول خط مماس بر یک دایره از نقطه A برابر ۴ و فاصله A از مرکز دایره برابر ۵ است شعاع دایره کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۳/۵ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۶۳۵- در شکل مقابل کمان AxB چند درجه است؟



۱) ۷۵ ۲) ۸۰

۳) ۹۰ ۴) ۹۵

*** ۶۳۶- مجموع مکعبهای اعداد طبیعی از یک تا ۲۱ کدام است؟**

۱) ۵۶۳۳۱ ۲) ۵۳۶۳۱ ۳) ۵۳۳۶۳ ۴) ۵۳۳۶۱

*** ۶۳۷- در روش استقرا و تعمیم یافته ...**

۱) فرض می‌کنیم حکم به ازای هر عدد طبیعی کمتر از n برقرار باشد.

۲) شروع استقرا هر عدد طبیعی می‌تواند باشد.

۳) شروع استقرا عدد طبیعی یک است.

۴) شروع استقرا می‌تواند عدد طبیعی مشخصی باشد.

۶۳۸- کدام مورد یک مثال نقض برای حکم «حاصلضرب هر دو ماتریس مخالف صفر، ماتریسی مخالف صفر است» نیست؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

۶۳۹- مجموعهٔ A دارای ۲۵ عضو و B و C و D زیر مجموعه‌های A می‌باشند اگر $n(B)=۳$ ، $n(C)=۴$ ، و $n(D)=۷$ و چهار مجموعه B و C و D و E یک افراز A باشند ، $n(E)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۶۴۰- در پرتاب $۲n$ سکه با هم با افزایش n، احتمال مساوی بودن تعداد «ر» و «پ» ها چگونه تغییر می‌کند؟

۱) صعودی ۲) نزولی

۳) یکسان ۴) متناوباً صعودی و نزولی

۶۴۱- اگر A و B دو پیشامد مستقل از یک آزمون تصادفی باشند و $p(B) = ۲p(A) = ۰/۸$ ، آنگاه $p(A'\cap B')$ کدام است؟

۱) ۰/۸۸ ۲) ۰/۳۲

۳) ۰/۱۲ ۴) ۰/۲۰

۶۴۲- حاصل $\frac{۵}{۱-۳i} + \frac{۵+۵i}{۲-۴i}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) $۳i$ ۳) $۲+i$ ۴) $۳+i$

سؤالات کنکور مرحله دوم ۷۷-۷۶

۶۴۳- اگر $c-d=-۷$ و $d^۲-c^۲=۷۷$ ، مقدار $(c+d)^۲$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۸۱ ۳) ۱۲۱ ۴) ۱۲۴

۶۴۴- کسر متعارفی مساوی عدد اعشاری $۱/\overline{۳۹}$ به صورت $\frac{p}{q}$ است که $(p,q)=۱$. مجموع ارقام q کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۶۴۵- خط گذرنده از نقطه $(۱,-۲)$ و عمود بر خط به معادله $۲y+x=۰$ محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

۶۴۶- طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای $۲x+۱$ ، $۲x-۱$ است $(x>۱)$ ، طول ضلع متوسط کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

۶۴۷- حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی از ۵ برابر عدد کوچکتر ۳۲ واحد بیشتر است، مجموع آن دو عدد کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۹ ۳) ۱۷ ۴) ۱۵

۶۴۸- اگر $f(x)=2x-2$ و $g(x)=x^2-1$، جوابهای معادله $fog(x)=0$ کدام است؟

۱) $\pm\sqrt{2}$ ۲) ± 2 ۳) ± 3 ۴) $\pm\sqrt{3}$

۶۴۹- $\log_{8}\frac{\sqrt{2}}{4}$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۶۵۰- مجموع n جمله اول یک تصاعد عددی $s_n=\frac{n(9n-5)}{12}$ است، قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۶۵۱- در نمودار دایره‌ای نمرات ۸۴ دانش‌آموز، کمان متناظر با نمرات بین ۱۸-۱۶ برابر ۶۰ درجه است. فراوانی متناظر با نمره ۱۷ در نمودار میله‌ای کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۶۵۲- حاصل $\sqrt{2}\left[\sin(x+\frac{\pi}{4})+\cos(x+\frac{\pi}{4})\right]$ کدام است؟

۱) $2\cos x$ ۲) $2\sin x$

۳) $\sin x$ ۴) $\cos x$

۶۵۳- سه کتاب متمایز ریاضی و چهار کتاب متمایز ادبی را به چند طریق می‌توان در یک قفسه کنار هم قرار داد بطوری که کتابهای ریاضی همواره کنار هم باشند؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۵۴۰ ۴) ۷۲۰

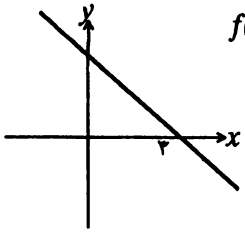
۶۵۴- اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$ ، دترمینان $(A^{-۱})^{۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۶۵۵- به ازای کدام مقدار k ریشه‌های معادله $۲x^{۲}+۳x-k=۰$ دو واحد از ریشه‌های معادله $۲x^{۲}-۵x+۱=۰$ کمتر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۵۶- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x^{۲}-۵x+b}{a-x} & x\neq a \\ ۱ & x=a \end{cases}$



شکل مقابل است ، $a+b$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۸

۶۵۷- حد عبارت $\frac{tan۳x\sqrt{۱-cos۴x}}{x^{۲}+x^{۳}}$ وقتی $x\to ۰^{+}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) ۶ ۴) $۶\sqrt{۲}$

۶۵۸- به ازای کدام مقدار a در سهمی به معادله $y^{۲}=ay+۲x+۵$ خط هادی به معادله $x=-\frac{۷}{۲}$ است؟

۱) ± ۱ ۲) ± ۲ ۳) ± ۳ ۴) ± ۴

۶۵۹- تعداد قائم‌هایی که از نقطه $A(۳,۰)$ بر منحنی تابع $y^{۲}=۴x$ می‌توان رسم کرد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

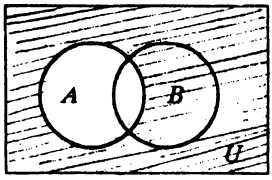
۶۶۰- شیب (ضریب زاویه) خط مماس در نقطه عطف نمودار تابع $y=cot(x)$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۶۶۱- ماکزیمم مطلق تابع با ضابطه: $y=-x|x|$ بر $[-۲,۱]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۶۲- با توجه به دیاگرام ون مقابل مجموعهٔ سایه زده شده کدام است؟



۱) A' ۲) $B-A$

۳) $B'-A$ ۴) $A'\cup B$

۶۶۳- رابطهٔ عمود بودن برای خطوط واقع در یک صفحه کدام خاصیت را دارد؟

۱) بازتابی ۲) تقارنی

۳) تراگذری ۴) تابع بودن

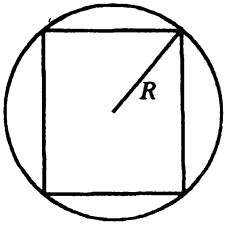
۶۶۴- اگر $S=(۱,۲,۳,۴)$ و $P(۱)=۲p(۲)=۳p(۳)=۴p(۴)$ ، $P(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۲۵}$ ۲) $\frac{۸}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱۲}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۴}{۲۵}$

۶۶۵- خانواده‌ای دارای ۵ فرزند است. احتمال آنکه این خانواده حداکثر چهار دختر داشته باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۳۱}{۳۲}$ ۲) $\frac{۲۷}{۳۲}$ ۳) $\frac{۷}{۳۲}$ ۴) $\frac{۶}{۳۲}$

۶۶۶- نقطه‌ای به تصادف درون دایره شکل مقابل انتخاب می‌کنیم، احتمال آنکه این نقطه در داخل مربع باشد، چقدر است؟



۱) $\frac{۲}{\pi}$ ۲) $\frac{۳}{\pi}$

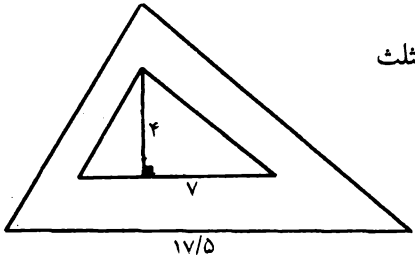
۳) $۱-\frac{۲}{\pi}$ ۴) $۱-\frac{۳}{\pi}$

۶۶۷- یک نه ضلعی محدب حداکثر چند زاویه حاده داخلی می‌تواند داشته باشد؟

۶۶۸- یکی از زاویه‌های مثلث متساوی‌الساقین برابر 100° درجه است، نیمساز خارجی یکی از زاویه‌ها ضلع مقابل را با کدام زاویه قطع می‌کند؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

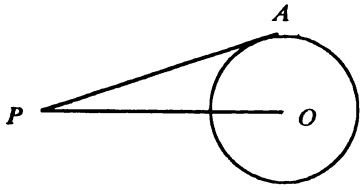
۶۶۹- در شکل مقابل مساحت مثلث بزرگتر کدام است؟



۱) ۸۸/۵ ۲) ۸۷/۵

۳) ۷۸/۵ ۴) ۷۷/۵

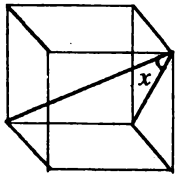
۶۷۰- در شکل مقابل PO برابر ۵ شعاع دایره برابر واحد است، طول PA کدام است؟



۱) $6\sqrt{2}$ ۲) $5\sqrt{2}$

۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $2\sqrt{6}$

۶۷۱- در مکعب شکل مقابل زاویه x کدام است؟



۱) $Arc\ sin\frac{5}{3}$ ۲) $Arc\ sin\frac{\sqrt{6}}{3}$

۳) $Arc\ cos\frac{\sqrt{6}}{3}$ ۴) $Arc\ cos\frac{\sqrt{5}}{3}$

۶۷۲- حجم کره‌ای به شعاع R با حجم مخروطی به شعاع قاعدهٔ R برابر است ارتفاع مخروط چند برابر شعاع R است.

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۶۷۳- تابع با ضابطه $f(x)=\left([\frac{x+1}{2}]+[\frac{x-1}{2}]\right)x$ در نقطه $x=1$ از نظر پیوستگی به کدام صورت است؟

۱) پیوستگی چپ و راست ۲) فقط پیوستگی راستی

۳) فقط پیوستگی چپ ۴) ناپیوستگی چپ-ناپیوستگی راست

۶۷۴- به ازای کدام مقدار a خط به معادله $y+x=a$ مجانب مایل منحنی به معادله $y=\sqrt{\frac{x^3+x^2}{x-2}}$ است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۶۷۵- به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع $f(x)=\begin{cases} ax+5 & x\geq 1 \\ x^2-a & x<1 \end{cases}$ در R مشتق‌پذیر است؟

۱) $(2,-2)$ ۲) $\{-2\}$

۳) $\{2\}$ ۴) ϕ

۶۷۶- اگر $f(x)=x^3-3x\ ;\ x>1$ ، اندازهٔ مشتق تابع $f^{-1}(x)$ در نقطه تلاقی نمودار آن با نمودار تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۹

۶۷۷- حاصل عبارت $\frac{\sin 80^\circ-\sin 40^\circ}{\cos 80^\circ}$ برابر کدام است؟

۱) $2\sin 10^\circ$ ۲) $2\cos 10^\circ$

۳) $4\cos 10^\circ$ ۴) $4\sin 10^\circ$

۶۷۸- اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=-\frac{2}{3}$ ، مقدار مشتق $f(\sqrt{1-3x})$ به ازای $x=-1$ کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۶۷۹- خط به معادله $y=a$ بر منحنی تابع با ضابطه $f(x)=\cos^2 x+\sin x$ مماس است ، a کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۶۸۰- جواب کلی معادله مثلثاتی $3\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+\sin 2x+5=0$ به کدام صورت است؟

۱) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۲) $2k\pi-\frac{\pi}{4}$

۳) $k\pi+\frac{5\pi}{4}$ ۴) $2k\pi-\frac{3\pi}{4}$

۶۸۱- مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۶۸۲- مساحت محدود به نمودار تابع $y=x^3$، محور xها و خطوط به معادلات $x=-1$ و $x=2$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{4}$ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) $\frac{13}{4}$ ۴) $\frac{11}{4}$

۶۸۳- به ازای کدام مقدار n معادله سیاله $60x+84y=5n-1$ در مجموعه Z دارای جواب است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۹ ۳) ۳۳ ۴) ۳۵

۶۸۴- از رابطهٔ همنهشتی (پیمانه ۹) $12a\equiv 18b$ کدام نتیجه‌گیری به (پیمانه ۳) نادرست است؟

۱) $2a\equiv 3b$ ۲) $4a\equiv 6b$ ۳) $a\equiv 0$ ۴) $b\equiv 2$

۶۸۵- باقیمانده تقسیم عدد 2^{26} بر عدد ۴۳ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۲۶

۶۸۶- در پرتاب یک تاس (مکعب) اگر عدد رو شده بیشتر از ۳ باشد، مجاز به پرتاب تاس دوم هستیم، با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده کوچکتر از ۸ است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۶۸۷- اگر $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = 0$ ($\vec{V}_1 \neq 0$ و $\vec{V}_2 \neq 0$) بردارهای $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_1$ غیر صفر باشند، آنگاه الزاماً ...

۱) $\vec{V}_1 = -\vec{V}_2$ ۲) $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$

۳) $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2$ ۴) $\vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2$

۶۸۸- فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط به معادلات $x+1=z$ و $y-1=z$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{3}$

۶۸۹- دو صفحه به معادلات $2x+y+z=1$ و $x+my+2z=-1$ بر هم عمودند، m کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

۶۹۰- اگر $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2$ حاصل $\begin{vmatrix} a_1 & -3b_1 & c_1 \\ -2a_2 & 6b_2 & -2c_2 \\ a_3 & -3b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) -۶ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۶۹۱- A و B دو ماتریس $A^T.B^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (X^T ماتریس ترانهاده X است.) است، ماتریس BA کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

۶۹۲- به ازای کدام مقدار m سه بردار $(۱,۱,۱)$ و $(۲,-۱,m)$ و $(۱,۲,-۱)$ در $R^۳$ مستقل خطی‌اند؟

۱) $m\neq ۵$ ۲) $m\neq ۶$

۳) $m\neq ۷$ ۴) $m\neq ۸$

*۶۹۳- زاویه θ در مختصات قطبی عدد مختلط $z=\left(\frac{۱+i}{۱-i}\right)^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) π

۶۹۴- ناحیه محدود به یک چند ضلعی در کدام حالت ممکن است مجموعه محدب نباشد؟

۱) تمام نقاط پاره‌خطی که دو نقطه دلخواه آنرا بهم وصل کند عضو آن مجموعه باشد.

۲) هر زاویه داخلی کمتر از نیم صفحه.

۳) سایر رأس‌ها در یک طرف هر خطی قرار دارند که بر ضلع آن منطبق است.

۴) یک قطر آن را به دو مجموعه محدب تقسیم کند.

۶۹۵- کدام تبدیل زیر، نقطه ثابت ندارد؟

۱) دوران ۲) انتقال

۳) انتقال و دوران ۴) انعکاس

*۶۹۶- دنباله $\{a_n\}$ با $a_۱=۱$ و $a_{n+۱}=\sqrt{۲a_n}$ شرط کدام خاصیت را دارد؟

۱) بی‌کران ۲) کراندار-نزولی

۳) واگرا ۴) همگرا

♣ ۶۹۷- کدام تابع با ضابطهٔ زیر بر R نزولی است؟

۱) $y=-|x|$ ۲) $y=-e^{-x}$

۳) $y=e^{-x}$ ۴) $y=\frac{۱}{x+۱}$

۶۹۸- اگر $F(x)=\int_{۰}^{tanx}\frac{۱}{۱+x^{۲}}$ ، $F'(x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) $۲tanx$ ۴) $tan۲x$

♣ ۶۹۹- مقدار مشتق عبارت $tan(e^{sinx})$ در $x=۰$ کدام است؟

۱) $۱-tan۱$ ۲) $۱+tan۱$

۳) $۱-tan^{۲}۱$ ۴) $۱+tan^{۲}۱$

۷۰۰- مقدار $\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{۱+\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $۱+ln۲$ ۲) $۱-tan۲$

۳) $۲(۱+ln۲)$ ۴) $۲(۱-ln۲)$

♣ ۷۰۱- اگر c نقطه مربوط به قضیه رول در مورد تابع $y=(x-۱)sinx$ بر بازه $[۰,۱]$ باشد، $tanc$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱-c}$ ۲) $\frac{۱}{۱+c}$

۳) $۱-c$ ۴) $۱+c$

♣ ۷۰۲- حاصل $\int_{۱}^{e}lnxdx$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) e ۳) $e-۱$ ۴) $e+۱$

**۷۰۳- مرتبه گراف G ، ۸ و اندازه آن ۲۷ می‌باشد، درجه چند رأس آن ماکسیمم است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

**۷۰۴- تعداد سه‌تایی‌های مرتب که با مختصات صحیح نامنفی در رابطه $x+y+z=۵$ صدق کنند ، کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

**۷۰۵- به ازای کدام مقدار a تابع $x=۱, ۲, ..., n$ و $P(X=x)=\frac{۱}{n^۲}(۲x+a)$ یک تابع احتمال است ؟

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

**۷۰۶- هستهٔ یک تبدیل خطی از R^n به R^m $(m\neq n)$ مجموعه‌ای است که بیش از یک عضو دارد. این تبدیل ...

۱) پوشا است و یک به یک نیست.

۲) هم یک به یک و هم پوشا است.

۳) یک به یک نیست ولی ممکن است پوشا باشد.

۴) یک به یک است و پوشا نیست.

**۷۰۷- در کدام صورت وارون نگاشت خطی $f:R^n\to R^n$ ممکن است موجود نباشد؟

۱) تصویر f یک زیر فضای R^n باشد.

۲) ماتریس وابسته f وارون‌پذیر نباشد؟

۳) f پوشا باشد.

۴) یک به یک باشد.

پاسخ تشریحی آزمونها

۱ -(۱) باید زیر رادیکال نا منفی باشد بنابر این باید $cos^{۲}x-[cosx] \geq ۰$ ، در نتیجه باید $cos^{۲}x \geq [cosx]$.

اگر $x \neq ۲k\pi$ عبارت $cosx$ همواره کمتر از ۱ بوده و بزرگتر یا مساوی ۱- است. بنابراین عبارت $[cosx]$ همواره برابر ۰ یا ۱ است. در نتیجه اگر $x \neq ۲k\pi$ نامساوی $cos^{۲}x \geq [cosx]$ برقرار است.

اگر $x=۲k\pi$ عبارت $cosx$ و نیز $cos^{۲}x$ برابر ۱ هستند و در این حالت نیز نامساوی $cos^{۲}x \geq [cosx]$ برقرار است.بنابراین هر عدد حقیقی x می‌تواند جزء دامنه باشد.

۲ -(۳) با توجه به آنکه تابع متناوب با دوره تناوب ۲π می‌باشد کافی است روی یک دوره تناوب برد تابع را معین کنیم با توجه به آزمون قبل اگر $x \in (۰, \frac{\pi}{۲}]$ عبارت $[cosx]$ برابر ۰ و $cos^{۲}x$ در فاصلهٔ $[۰,۱)$ میباشد و در نتیجه مقادیر $cos^{۲}x-[cosx]$ در فاصلهٔ $[۰,۱)$ است.

اگر $x \in (\frac{\pi}{۲}, \pi]$ عبارت $[cosx]$ برابر ۱- و $cos^{۲}x$ در فاصلهٔ $[۰,۱)$ بوده در نتیجه مقادیر $cos^{۲}x-[cosx]$ در فاصلهٔ $[۱,۲)$ است.

اگر $x \in (\pi, \frac{۳\pi}{۲}]$ عبارت $[cosx]$ برابر ۱- و $cos^{۲}x$ در فاصلهٔ $[۰,۱)$ بوده در نتیجه مقادیر $cos^{۲}x-[cosx]$ در فاصلهٔ $[۱,۲)$ است.

اگر $x\in(\frac{۳\pi}{۲},۲\pi)$ عبارت $[cosx]$ برابر ۰ و $cos^۲x$ در فاصلهٔ $(۰,۱]$ بوده در نتیجه مقادیر $cos^۲x-[cosx]$ در فاصلهٔ $(۰,۱)$ است.

بنابراین مقادیر $cos^۲x-[cosx]$ وقتی x در دامنه تغییر می‌کند در فاصلهٔ $[۰,۲]$ تغییر می‌کند و مقادیر تابع در فاصلهٔ $[۰,\sqrt{۲}]$ تغییر می‌کند.

۳ -(۲) ابتدا توجه کنید که دامنهٔ تابع R می‌باشد. اکنون در تساوی $y=\frac{\sqrt{۳}x^۲+۲x-\sqrt{۳}}{x^۲+۱}$ ، x را بر حسب y بدست می‌آوریم داریم

$$y=\frac{\sqrt{۳}x^۲+۲x-\sqrt{۳}}{x^۲+۱}\Rightarrow y(x^۲+۱)=\sqrt{۳}x^۲+۲x-\sqrt{۳}\Rightarrow$$

$$(y-\sqrt{۳})x^۲-۲x+y+\sqrt{۳}=۰\Rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۱-(y-\sqrt{۳})(y+\sqrt{۳})}}{(y-\sqrt{۳})}$$

در آخرین تساوی باید $۴-y^۲\geq ۰$ و $y-\sqrt{۳}\neq ۰$، بنابراین دامنهٔ تابع مجموعهٔ $[-۲,۲]-\{\sqrt{۳}\}$ می‌باشد.

۴ -(۳) باید از حل معادلهٔ $۲x-sin(x-۲)=۴$ مقدار x را بدست آورد معادلهٔ اخیر دارای جواب $x=۲$ است در نتیجه $f^{-۱}(۴)=۲$ از طرفی $f(۲)=۴$ بنابراین خواهیم داشت:

$$f(۲)+f^{-۱}(۴)=۴+۲=۶$$

۵ -(۲) با توجه به تعریف قدرمطلق داریم

$$f(x)=۲x-۱+۲|x-۲|=\begin{cases}۲x-۱-۲x+۴ & x<۲\\ ۲x-۱+۲x-۴ & x\geq ۲\end{cases}=\begin{cases}۳ & x<۲\\ ۴x-۵ & x\geq ۲\end{cases}$$

۶ -(۲) توجه کنید که $gof(x)=g(f(x))$ بنابراین خواهیم داشت

$$gof(۰)=g(f(۰))=g(۳)=۱ \quad و \quad gof(۱)=g(f(۱))=g(۲)=۴$$

تابع gof در نقطهٔ $x=۲$ تعریف نشده است

$$gof=\{(۲,۴),(۳,۱)\}o\{(۱,۲),(۲,۵),(۰,۳)\}=\{(۰,۱),(۱,۴)\}\Rightarrow$$

$$(gof)^{-۱}=\{(۱,۰),(۴,۱)\}$$

۷ -(۴) نخست باید زیر رادیکال منفی نباشد بنابر این

$$۱-x^۲\geq ۰ \Rightarrow x^۲\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq x\leq ۱$$

علاوه بر این باید مخرج کسر مخالف صفر باشد در نتیجه اعداد صحیح نیز جزء دامنه نمی‌باشند. توجه کنید که دو عبارت $[-x]$ و $[x]$ هنگامیکه x عددی صحیح باشد قرینهٔ یکدیگرند. در نتیجه دامنه تابع گزینهٔ ۴ می‌باشد.

۸ -(۱) از آنجا که عبارت $[x]$ همواره عددی صحیح است مقدار $sin^۲\pi[x]$ برای هر عدد حقیقی صفر است و در نتیجه دامنه تابع تمامی اعداد حقیقی است.

۹ -(۱) ابتدا باید تابع $f(x)$ را محاسبه نمود. برای این منظور اگر x را به $۲-x$ تبدیل کنیم دستگاه زیر حاصل می‌شود و اگر دو برابر دومی را از اولی کم کنیم نتیجه حاصل می‌شود

$$\begin{cases} f(x-۱)+۲f(۱-x)=۴x-۴ \\ f(۱-x)+۲f(x-۱)=۴-۴x \end{cases} \Rightarrow -۳f(x-۱)=-۱۲+۱۲x \Rightarrow f(x-۱)=۴-۴x$$

اگر در آخرین تساوی xرا به $x+۱$تبدیل کنیم $f(x)=-۴x$ حاصل می شود که فرد است.

روش دوم: می‌توان از ابتدا از تغییر متغیر $u=x-۱$ استفاده کرد و در نهایت مشابه حالت قبلی به نتیجه رسید.

۱۰ -(۳) هنگامیکه x از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند $\frac{\pi x}{۲}$ از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر می‌کند بنابراین عبارت $cos^۴\frac{\pi x}{۲}-sin^۴\frac{\pi x}{۲}$ از ۱- تا ۱ تغییر می‌کند و در نتیجه تابع پوشا است. علاوه بر این تابع هر مقداری را فقط یکبار اختیار میکند و بنابراین یک‌به‌یک است.

روش دوم: معادلهٔ $cos^۴\frac{\pi x}{۲}-sin^۴\frac{\pi x}{۲}=a$ برای تمامی اعداد a که در فاصلهٔ

$[۰,۱]$ باشد جواب دارد وآن جواب منحصر به فرد است زیرا می‌توان معادله را بصورت $cos^{۲}\frac{\pi x}{۲}-sin^{۲}\frac{\pi x}{۲}=a$ و یا $cos\pi x=a$ نوشت که همواره دارای جواب منحصر به فرد $x=\frac{۱}{\pi}cos^{-۱}a$ می‌باشد.

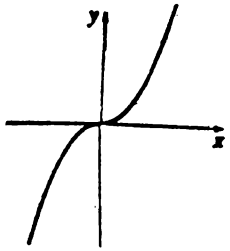
روش سوم: اگر از ابتدا ضابطهٔ تابع را بصورت $f(x)=cos\pi x$ بنویسید پوششی و یک به یک بودن آن بسادگی دیده می‌شود.

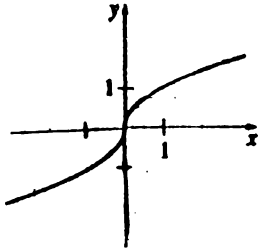
روش چهارم: از آنجاکه $f(۰)=۱$ و $f(۱)=-۱$ و تابع پیوسته است بنابر قضیهٔ بولتسانو تابع تمامی مقادیر موجود در فاصلهٔ $[-۱,۱]$ را اختیار می‌کند در نتیجه تابع پوشا است علاوه بر این مشتق تابع غیر از نقاط ابتدا و انتها برابر صفر است بنابراین تابع یک‌به‌یک است.

۱۱ -(۳) ابتدا می‌توان ضابطهٔ تابع f رابصورت $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ -\sqrt{-x} & x<۰\end{cases}$ بنویسید. وقتی x مثبت است ، y نیز مثبت می‌باشد و از تساوی $y=\sqrt{x}$ تساوی $y^{۲}=x$ حاصل می‌شود و هنگامی که x منفی است ، y نیز منفی می‌باشد و از تساوی $y=-\sqrt{-x}$ تساوی $y^{۲}=-x$ حاصل می‌شود همینطور وقتی x صفر است ، y نیز صفر می‌باشد .بنابراین با جمع‌بندی تساویهای اخیر x را بر حسب y بدست آورده و در آخر جای x و y را عوض می‌کنیم داریم

$$x=\begin{cases}y^{۲} & y>۰\\ ۰ & y=۰\\ -y^{۲} & y<۰\end{cases}\Rightarrow y=\begin{cases}x^{۲} & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ -x^{۲} & x<۰\end{cases}\Rightarrow y=x|x|$$

روش دوم: با رسم نمودار $y=f(x)$ و سپس یافتن قرینهٔ نمودار نسبت به نیمساز ربع اول و سوم ابتدا نمودار معکوس را یافته و سپس از روی نمودار معادلهٔ معکوس را تشخیص می‌دهیم .





روش سوم: نقاط $(۱,۱)$ و $(-۱,-۱)$ روی نمودار f می‌باشند و باید نقاط $(۱,۱)$ و $(-۱,-۱)$ روی نمودار $f^{-۱}$ نیز باشند. در بین گزینه‌ها فقط گزینه ۳ حائز این شرط است.

۱۲ -(۴) در رابطهٔ $f(ab)=[f(a)]^b$ بجای a و b بترتیب ۱ و x را قرار دهید تساوی $f(۱\times x)=[f(۱)]^x$ یا $f(x)=[f(۱)]^x$ حاصل می‌شوددر مرحلهٔدوم بجای a و b بترتیب $\frac{۱}{۲}$ و $۲x$ را قرار دهید تساوی $f(x)=[f(\frac{۱}{۲})]^{۲x}$ حاصل می‌شود.

۱۳ -(۱) بنابه فرض $f(x)=ax+b$، و چون $f(f(x))=x+۲$، داریم $ab+b=۲$ و $f((ax+b))=a(ax+b)+b=a^۲x+ab+b=x+۲ \Rightarrow a^۲=۱$ دو حالت $a=۱$ و $b=۱$ یا $a=-۱$ و $b=۲$ از تساویهای اخیر حاصل می‌شود که $a=۱=b$ قابل قبول است در نتیجه $f(x)=x+۱$ و بنابراین $f(۵)=۶$

۱۴ -(۳) باید عبارت $xsin^۲\pi x$، نامنفی باشد چون $sin^۲\pi x$ همواره نامنفی است اگر x نامنفی باشد آنگاه جزء دامنه است بنابراین $[۰,+\infty[$ قسمتی از دامنه می‌باشد. از طرفی اگر x متعلق به Z باشد عبارت $sin^۲\pi x$ صفر است، درنتیجه مجموعه Z نیز قسمتی از دامنه می‌باشد. ودامنه مجموعهٔ $[۰,+\infty[\cup Z$ می‌باشد.

۱۵ -(۱) از آنجاکه $g(x)=\sqrt{x}$ با معنی است x مثبت بوده وداریم

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{x}{x+1}=\frac{(\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2+1}=\frac{g(x)^2}{g(x)^2+1}\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$$

$$z=\frac{f(x)+f(y)}{f(\sqrt{xy})}=\frac{log(x)+log(y)}{log(\sqrt{xy})}=\frac{log(xy)}{log(xy)^{1/2}}=2 \qquad (1)-16$$

(۲)-۱۷

$$f(na)=f(\underbrace{a+a+...+a}_{n\text{ مرتبه}})=f(a)+f(\underbrace{a+a+...+a}_{n-1\text{ مرتبه}})=...=nf(a)$$

روش دوم: با توجه به روابط زیر گزینه‌های ۱ و ۴ باطل می‌شود

$$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)\Rightarrow f(0)=0$$

همینطور با توجه به روابط زیر گزینهٔ ۳ باطل می‌شود

$$f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=2f(1)\Rightarrow f(2)=2f(1)$$

۱۸ -(۳) اگر در تساوی $af(x)+2bf(-x)=2x^2$ ، x را به $-x$ تبدیل کنیم تساوی $af(-x)+2bf(x)=2x^2$ حاصل می‌شود. اکنون a برابر تساوی اول را با $-2b$ برابر تساوی دوم جمع می‌کنیم ، تساوی زیر حاصل می‌شود

$$(a^2-4b^2)f(x)+0\times f(-x)=(2a-4b)x^2\Rightarrow f(x)=\frac{(2a-4b)x^2}{a^2-4b^2}=\frac{2x^2}{a+2b}$$

۱۹ -(۱) اگر تابع f چند جمله‌ای از درجهٔ n باشد، تابع fof از درجهٔ n^2 است.

۲۰ -(۴) مجموعهٔ $f^{-1}(A)$ تمام نقاطی چون (x,y) است که $x+y=5$

۲۱ -(۴) چون $f(0,0)=f(1,1)=(1,-1)$ ، f تابع یک‌به‌یک نیست. علاوه‌براین فقط نقاطی که روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارند جزء برد می‌باشند.

۲۲ -(۴) از تساوی $y=\sqrt{3x-x^2-2}$ تساوی $y^2=3x-x^2-2$ یا $-x^2+3x-y^2-2=0$ حاصل می‌شود با توجه به دستور دلتا، داریم

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4y^2-8}}{-2}=\frac{3\pm\sqrt{1-4y^2}}{2}\Rightarrow 1-4y^2\geq 0\Rightarrow -\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}$$

چون y نامنفی است بنابراین برد تابع $[0,\frac{1}{2}]$ است.

روش دوم: می‌توان عبارت زیر رادیکال را بصورت $(x-1)(2-x)$ نوشت و این عبارت در فاصلهٔ $[1,2]$ نامنفی است. کمترین مقدار y برابر صفر است و بیشترین مقدار آن در نقطهٔ $x=\frac{3}{2}$ حاصل میشود که همان $\frac{1}{2}$ است.

۲۳ -(۴) ابتدا توجه کنید که عبارت $y=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}$ همواره مثبت است. اکنون x را بر حسب y محاسبه میکنیم

$$y=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y^2(x^2+1)=(x^2+3)^2 \Rightarrow x^4-(y^2-6)x^2+9-y^2=0$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{y^2-6\pm\sqrt{(y^2-6)^2-4\times(9-y^2)}}{2}$$

در تساوی اخیر عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد داریم

$$(y^2-6)^2-36+4y^2\geq 0 \Rightarrow y^4-8y^2\geq 0 \Rightarrow y^2-8\geq 0 \Rightarrow$$

$$y\geq 2\sqrt{2} \quad \text{یا} \quad y\leq -2\sqrt{2}$$

چون y مثبت است $y\geq 2\sqrt{2}$ قابل قبول می‌باشد. و برد تابع فاصلهٔ $[2\sqrt{2},+\infty)$ است.

روش دوم: نخست توجه کنید که تابع زوج است پس کافی است روی فاصلهٔ $[0,+\infty)$ برد را محاسبه کنیم در صفر مقدار تابع برابر ۳ است. اکنون مشتق تابع $y=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}$ برابر است با

$$y'=\frac{2x\sqrt{x^2+1}-[(2x)\times(1/2)\times(x^2+1)^{-1/2}](x^2+3)}{x^2+1}=0 \Rightarrow$$

$$x(2x^2+2-x^2-3)=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0 \text{ و } x=\pm 1$$

توجه کنید که در معادلهٔ $y'=0$، در طرف راست از x فاکتور گرفته، صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{x^2+1}$ ضرب نموده و چون مخرج همواره مثبت است کافی است که فقط صورت کسر را برابر صفر قرار دهیم. داریم

$x(۲x^۲+۲-x^۲-۳)=۰ \Rightarrow x(x^۲-۱)=۰ \Rightarrow x=۰$ و $x=\pm ۱$

روی فاصلهٔ صفر و یک مشتق منفی و برای مقادیر بزرگتر از یک مثبت است کمترین مقدار تابع در نقطه به طول یک حاصل می‌شود و برابر $۲\sqrt{۲}$ است. هنگامی که x به سمت $+\infty$ میل می‌کند مقدار تابع نیز به سمت $+\infty$ میل می‌کند. بنابراین برد تابع فاصلهٔ $[۲\sqrt{۲}, +\infty)$ است.

روش سوم: مقادیر تابع همواره از ۱ بزرگترند چون صورت از مخرج بیشتر می‌باشد، و فقط گزینهٔ ۴ حائز این شرایط است.

روش چهارم: میتوانید تابع را بصورت $y=\sqrt{x^۲+۱}+\frac{۲}{\sqrt{x^۲+۱}}$ بنویسید و مشابه روش سوم عمل کنید.

۲۴ -(۲) سری $\sum_{k=۱}^{+\infty}\frac{۱}{k}$ واگراست.

۲۵ -(۳) سری $\sum_{k=۱}^{+\infty}\frac{p(k)}{q(k)}$ که در آن p و q دو چند جمله‌ای به ترتیب از درجهٔ m و n هستند واگراست اگر $n\leq m+۱$ و همگراست اگر $n<m+۱$.

۲۶ -(۳) $u_۴=\frac{\sqrt{۴}}{۴^۲+۱}=\frac{۲}{۱۷}$

۲۷ -(۳) عناصردنباله همان اعداد طبیعی فرد می‌باشد.

۲۸ -(۴) هنگامی که n بزرگ میشود عبارت $n^۵$ نیز بزرگ میشود و دنبالهٔ $a_n=sin(n^۵)$ به سمت عدد بخصوصی میل نمی‌کند.

۲۹ -(۱) هنگامی که n بزرگ میشود عبارت $\frac{n}{n+۲}$ به سمت ۱ میل می‌کند.

۳۰ -(۲) وقتی که n بزرگ میشود عبارت $\frac{n^۲}{n^۲+۱}$ به سمت ۱ میل می‌کند. بعلاوه عبارت اخیر همواره مابین $\frac{۱}{۲}$ و ۱ واقع است.

۳۱ -(۱) اگر سری $\sum_{k=۱}^{+\infty}a_k$ همگرا و سری $\sum_{k=۱}^{+\infty}b_k$ واگرا باشد در اینصورت

سریهای $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k-b_k)$ و $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k+b_k)$ واگرایند.

۳۲ -(۳) به آزمون قبلی و آزمون ۲۴ توجه کنید.

۳۳ -(۲) دنباله متناوب بوده واز بالا بـه ۲ و از پـایین بـه ۰ کـرانـدار است. همینطور دنباله به ۱ همگراست.

۳۴ -(۱) دنباله غیر متناوب بوده واز بالا به ۳ و از پایین به ۰ کراندار است. همینطور دنباله به e (عدد نپر) همگراست.

۳۵ -(۲) اگر از $\frac{۳}{۱۰}$ فاکتور بگیریم یک سری هندسی با قدر نسبت $\frac{۱}{۱۰}$ و جملهٔ اول ۱ می‌باشد. مجموع این سری برابر $\frac{۱}{۱-۱/۱۰}\times\frac{۳}{۱۰}$ یا $\frac{۱}{۳}$ است.

۳۶ -(۳) اگر از ۴ فاکتور بگیریم یک سری هندسی با قدر نسبت $\frac{۱}{۲}$ و جملهٔ اول ۱ حاصل می‌شود. حاصل سری برابر $۴\times\frac{۱}{۱-۱/۲}$ یا ۸ است.

۳۷ -(۱) $\lim_{x\to+\infty}(\frac{۱}{۳})^n=۰$ و ثانیاً $a_۳=(\frac{۱}{۳})^۳=\frac{۱}{۲۷}$

۳۸ -(۳) حد دنباله بصورت مبهم $\frac{+\infty}{+\infty}$ میباشد چون تابع $\frac{ln(۳x+۵)}{x}$ که از تعویض n با x در عبارت $\frac{ln(۳n+۵)}{n}$ حـاصل مـی‌شود ، مشـتقپذیر است. می‌توان از قاعده هوپیتال استفاده کرد.داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{ln(۳n+۵)}{n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(۳x+۵)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۳}{۳x+۵}}{۱}=۰$$

۳۹ -(۱) توجه کنید که وقتی n به سمت $+\infty$ میل می‌کند $\frac{۱}{n}$ به سمت ۰ میل می‌کند.

۴۰ -(۲) $u_n>u_{n+۱}\Leftrightarrow\frac{n+۱۲}{n+۵}>\frac{n+۱+۱۲}{n+۱+۵}\Leftrightarrow$

$$n^۲+۱۸n+۷۲>n^۲+۱۸n+۶۵\Leftrightarrow ۷۲>۶۵$$

۴۱ -(۲) بنابه تعریف دنبالهٔ $\{u_n\}$ را از بالا (سمت راست) کراندار می‌نامند

اگر یک عددحقیقی M موجود باشد بطوریکه به ازای هر $n\in N$، $u_n<M$ باشد.

۴۲ -(۲) به پاسخ سؤال شمارهٔ ۳۹ توجه کنید.

۴۳ -(۱) اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ کراندار و دنبالهٔ $\{b_n\}$ به صفر همگرا باشد آنگاه دنبالهٔ $\{a_nb_n\}$ به صفر همگرا است.

۴۴ -(۳) چون $x>0$ و n عددی طبیعی، بنابر این $1+x>1$ و در نتیجه $(1+x)^n>1^n$ یا $(1+x)^n>1$.

۴۵ -(۲) توجه کنید که وقتی n بزرگ می‌شود a^n نیز بزرگ می‌شود.

۴۶ -(۳) وقتی که n بزرگ می‌شود $\frac{1}{n}$ کوچک می‌شود.

۴۷ -(۱) وقتی که n بزرگ می‌شود $\sin n$ بین ۱ و ۱- محدود است در حالی که مخرج کسر یعنی n بزرگ می‌شود.

۴۸ -(۳) دنباله نزولی بوده و از بالا به ۱ و از پایین به ۰ کراندار است.

۴۹ -(۱) دنباله صعودی است زیرا داریم

$$n^2+\cos\frac{\pi}{n}<(n+1)^2+\cos\frac{\pi}{n+1}\Leftrightarrow 2n+1>\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n+1}$$

توجه کنید که آخرین نامساوی همواره برقرار است.

۵۰ -(۲) مقدار $\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}$ همواره از $\frac{1}{2\sqrt{k}}$ بزرگتر است و چون $\frac{1}{2\sqrt{k}}$ نیز از $\frac{1}{2k}$ بزرگتر است و سری $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k}$ واگراست بنابراین سری $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}$ واگراست.

۵۱ -(۳)

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{3^k+4^k}{6^k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{3^k}{6^k}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4^k}{6^k}=$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1+2=3$$

۵۲-(۱) با توجه به فرمول $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k - a_{k+1} = a_1$ داریم

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \log\frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} (\log k - \log(k+1)) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\log(k+2) - \log(k+1)) =$$

$$\log 1 - \log 2 = 0 - \log 2 = -\log 2$$

روش دوم: $\sum_{k=1}^{+\infty} \log\frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} (\log k + \log(k+2) - 2\log(k+1))$

$$(\log 1 + \log 3 - 2\log 2) + (\log 2 + \log 4 - 2\log 3) + \ldots$$

$$\log 1 - \log 2 = -\log 2$$

۵۳-(۲) هنگامی که n به سمت $+\infty$ میل می‌کند n- به سمت $-\infty$ میل می‌کند و در نتیجه a^{-n} به سمت ۰ میل می‌کند و داریم

$$\lim_{n\to+\infty} a^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a^n} = 0$$

۵۴-(۴) جملات اول تا ششم به ترتیب برابر ۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۵ و ۸ است.

۵۵-(۲) هنگامی که n به سمت $+\infty$ میل می‌کند $\frac{1}{n}$ به سمت صفر میل می‌نماید و در این وضعیت $\sin\frac{1}{n}$ با $\frac{1}{n}$ هم‌ارز است و داریم

$$\lim_{n\to+\infty} n \sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} n \frac{1}{n} = 1$$

۵۶-(۳)

$$5\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = 5\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2} = 5/5$$

۵۷-(۳) حد مجموع برابر $\frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{10}}$ یا $\frac{2}{9}$ است.

۵۸ -(۳) توجه کنید که دنباله بصورت مجموع دو دنباله می‌باشد. که حد یکی برابر ۲ و دیگری برابر صفر است و مجموع این دو نیز برابر ۲ است.

۵۹ -(۳) این دنباله را می‌توان بعنوان حاصلضرب دنباله $\frac{۱}{۱۰^n}+۲$ در خودش در نظر گرفت. چون حد دنباله $\frac{۱}{۱۰^n}+۲$ برابر ۲ است بنابراین حد $(\frac{۱}{۱۰^n}+۲)^۲$ برابر ۴ می‌باشد.

۶۰ -(۳) دنبالهٔ $\{a_n-b_n\}$ بصورت $\{۲(-۱)^n\}$ در می‌آید که واگراست.

۶۱ -(۴) اگر جملات گزینهٔ ۱ را در جملات دنبالهٔ داده شده ضرب کنید نتیجه حاصل می‌شود.

۶۲ -(۲) اگر یک سری همگرا باشد آنگاه حد جملهٔ عمومی آن برابر صفر است. بنابراین a_n به سمت صفر میل خواهد کرد.

۶۳ -(۳) سری داده شده مجموع جملات یک تصاعد حسابی با قدر نسبت $\frac{۱}{۲}$ و جملهٔ اول ۱ است و مجموع خواسته شده برابر $\frac{۱}{۱-۱/۲}$ یا ۲ است.

۶۴ -(۴) اگر تمام جملات یک دنباله از عددی بزرگتر باشند آنگاه حد آن دنباله در صورت وجود بزرگتر یا مساوی آن عدد خواهد بود.

۶۵ -(۳) اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ به L همگرا و c عددی ثابت، $\lim_{n\to+\infty} ca_n$ برابر cL است.

۶۶ -(۴) توجه کنید که حد a_n و b_n به ترتیب برابر صفر و $+\infty$ است.

۶۷ -(۲) در اینجا حد b_n و c_n به ترتیب برابر $+\infty$ و $-\infty$ است. ولی حد مجموع ایندو برابر صفر است. توجه کنید که $c_n + b_n$ برابر $\frac{۱}{n}$ است.

۶۸ -(۳) به پاسخ آزمون ۴۳ توجه کنید.

۶۹ -(۴) سری واگرا و در نتیجه غیر قابل محاسبه است.

۷۰ -(۲) در صورت و مخرج کسر از $۵^{n-۱}$ فاکتورگیری نمایید.

۷۱ -(۱) مشابه آزمون ۵۱ عمل کنید.

۷۲ -(۳) واضح است.

۷۳ -(۲) مشابه آزمون ۵۷ عمل کنید.

۷۴ -(۳) دنبالهٔ گزینهٔ ۳ به صفر همگراست.

۷۵ -(۳) اگر دنباله را بصورت $\left\{\frac{sin^۲n}{n^۲}+\frac{۳n^۲}{n^۲}\right\}$ بنویسید آنگاه حد قسمت اول مشابه آنچه در آزمون ۴۷ دیده می‌شود برابر صفر است وقسمت دوم همواره برابر ۳ می‌باشد.

۷۶ -(۲) گزینهٔ ۲ همواره کمتر از ۵۵ است. مشابه آنچه در آزمون ۵۵ بیان شد بجای $sin\frac{\pi}{n}$ عبارت $\frac{\pi}{n}$ را قرار دهید.

۷۷ -(۲) اگر $n\to+\infty$، آنگاه $\frac{\pi}{n}\to ۰$ و بجای $sin\frac{\pi}{n}$ می‌توان مقدار هم ارز آن یعنی $\frac{\pi}{n}$ را قرارداد داریم.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^۲}{۲n+۱}sin\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^۲}{۲n+۱}\times\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{۲}$$

۷۸ -(۳) از آنجاکه $۴<\pi<۳$ هنگامیکه $x\to\pi$ عبارت $x^۲$ مابین ۹ و ۱۶ می‌باشد و باید محدوده $x^۲$ به طور دقیق مشخص شود. یعنی باید دید که عبارت $x^۲$ ما بین کدام دو عدد صحیح است.

$\pi\approx۳/۱۴$ بنابراین وقتی $x\to\pi$ عبارت $x^۲$بین ۹ و ۱۰ قرار دارد در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to\pi}[x^۲]=۹$$

۷۹ -(۲) چون $x\to۱^+$ عبارت $x-۱$ مثبت بوده و به سمت صفر میل می‌کند، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to۱^+}\frac{x^۲-۱}{(x-۱)^۲}=\lim_{x\to۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)^۲}=\lim_{x\to۱^+}\frac{x+۱}{x-۱}=+\infty$$

۸۰ -(۱) هنگامیکه $x\to 0^-$ ، $\cos x$ عبارتی مثبت و نزدیک به یک می‌باشد و چون x منفی است خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-[\cos x]}}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-0}}{-x} = +\infty$$

۸۱ -(۳) زیرا هنگامیکه x به صفر نزدیک می‌شود، مقادیر تابع روی نمودار به ۰ نزدیک می‌شوند ، البته توجه کنید که مقدار تابع در حد تابع تاثیر ندارد.

۸۲ -(۴) باتوجه به فرمول انتگرال معین با درنظر گرفتن $f(x)=\cos x$ و $a=0$ و $b=1$ خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\cos\frac{1}{n}+\cos\frac{2}{n}+\ldots+\cos\frac{n}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$= \int_0^1 \cos x\,dx = \sin x\Big]_0^1 = \sin 1$$

۸۳ -(۱) حد صورت مبهم $\frac{0}{0}$ را دارد با استفاده از قاعده هوپیتال خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+3x}-\sqrt[7]{1+5x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{5}\times 3(1+3x)^{\frac{-4}{5}} - \frac{1}{7}\times 5(1+5x)^{\frac{-6}{7}}}{1}$$

$$= \frac{3}{5}-\frac{5}{7} = -\frac{4}{35}$$

۸۴ -(۱) وقتی $x\to 0$ عبارت x^2 به سمت صفر میل می‌کند و $\sin\frac{1}{x^3}$ عبارتی محدود است و حد مربوطه برابر صفر خواهد بود.

۸۵ -(۴) حد بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید و دوبار از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم داریم:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-(1+h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h}{2} = \frac{1}{2}$$

۸۶ -(۴) حد صورت مبهم $\frac{+\infty}{+\infty}$ را دارد از قاعده هوپیتال استفاده می‌نماییم

داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{۲}+e^{x}}{x+e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+e^{x}}{۱+e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲+e^{x}}{e^{x}}=۱$$

$$\lim_{x\to+\infty}۲^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{۲^{x}}=\lim_{x\to+\infty}(\frac{۱}{۲})^{x}=۰$$ (۴)- ۸۷

۸۸ -(۳) حد صورت مبهم $\frac{+\infty}{+\infty}$ را دارد از قاعده هوپیتال استفاده می‌نماییم

داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_{۲}x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱}{x\ln۲}}{\frac{۱}{x}}=\frac{۱}{\ln۲}$$

۸۹ -(۲) حد صورت مبهم $\frac{+\infty}{+\infty}$ را دارد از قاعده هوپیتال استفاده می‌نمائیم

داریم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_{\sqrt{۱۰}}x}{\log_{\sqrt{۲}}x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱}{x\ln\sqrt{۱۰}}}{\frac{۱}{x\ln\sqrt{۲}}}=\frac{\ln\sqrt{۲}}{\ln\sqrt{۱۰}}$$

$$\lim_{x\to e}e^{x}=e^{e}$$ (۴)- ۹۰

۹۱ -(۳) حد صورت مبهم $۱^{+\infty}$ را دارد مقدار حد را برابر A قرار می‌دهیم و از طرفین $\ln$ می‌گیریم داریم.

$$\ln A=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(۱+\frac{۱}{x}\right)$$

حد اخیر بصورت $۰.\infty+$ در می‌آید با جابجایی x از صورت به مخرج و استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(۱+\frac{۱}{x}\right)}{\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{۱}{-x^{۲}})/(۱+\frac{۱}{x})}{\frac{۱}{-x^{۲}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+۱}=۱\Rightarrow A=e$$

۹۲ -(۱) حد بصورت مبهم $\frac{+\infty}{+\infty}$ در می‌آید دوبار از قاعده هوپیتال بهره

می‌گیریم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

۹۳ - (۲) مشابه آزمون ۸۹ عمل کنید.

۹۴ - (۴) هنگامی که $x\to 0^+$ عبارت $u=-\frac{1}{x}$ به سمت $-\infty$ میل می‌کند داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x^2}=\lim_{u\to-\infty}u^2e^u=\lim_{u\to-\infty}\frac{u^2}{e^{-u}}=\lim_{u\to-\infty}\frac{2u}{-e^{-u}}=\lim_{u\to-\infty}\frac{2}{e^{-u}}=0$$

۹۵ - (۱) اگر حد را بصورت $\lim_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{1/x}$ بنویسید واضح است که حد صورت مبهم $1^{+\infty}$ را دارد مانند آزمون ۹۱ داریم.

$$\ln A=\lim_{x\to 0^+}\ln(\cos\sqrt{x})^{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos\sqrt{x}}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\ /\ \cos\sqrt{x})}{1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}}{\cos\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A=e^{-1/2}$$

۹۶ - (۲) حد بصورت $0^{+\infty}$ در می‌آید که برابر صفر است.

۹۷ - (۳)

$$\ln A=\lim_{x\to 0^+}\ln x^x=\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}-x=0\Rightarrow A=e^0=1$$

۹۸ - (۳)

$$\ln A=\lim_{x\to 0^+}\ln(\frac{\sin x}{x})^{\cot x}=\lim_{x\to 0^+}\cot x\ln(\frac{\sin x}{x})=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x-\ln x}{\tan x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{1+\tan^2 x}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^{2}}{x+x\cos x}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{-\sin x}=+\infty$$

۹۹- (۴) $\ln A=\lim_{x\to 0^+}\ln(x)^{\frac{1}{x^{n}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{n}}=$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{nx^{n}}=+\infty$$

۱۰۰- (۲) وقتی $x\to{}^{\pi}/_{2}{}^{+}$ عبارت $\tan x$ به سمت $-\infty$ میل می‌کند و در نتیجه $2^{\tan x}$ به سمت صفر میل می‌کند و در نتیجه حد مذکور برابر $\frac{5}{3}$ است.

۱۰۱- (۳) $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

۱۰۲- (۲) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

۱۰۳- (۳) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}}{1}=a\times 1=a$

روش دوم : با استفاده از تعریف مشتق حد مذکور برای تابع $f(x)=e^{ax}$ همان $f'(0)$ است که برابر a باشد.

۱۰۴- (۱) اگر $m>0$ حد صورت مبهم $\frac{+\infty}{+\infty}$ را دارد بنابراین باید از قاعده هوپیتال استفاده نمود.

اگر m عددی طبیعی باشد بعد از m بار مشتق‌گیری و اگر m غیر طبیعی باشد، بعد از $[m+1]$ بار استفاده از قاعده هوپیتال خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{m}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{kx^{n}}$$

که در اینجا اگر n طبیعی باشد $k=0$ و اگر n غیر طبیعی باشد،

$k=m(m-۱)\ldots(m-[m]-۱)$ و $n=m-[m]-۱$ که در هر صورت بعد از تعداد مورد نظر که از قاعده هوپیتال استفاده کنیم ، صورت همان e^x بوده و به سمت $+\infty$ میل می‌کند، اما مخرج صفر خواهد شد و یا آنکه عبارتی مثبت است که به سمت صفر میل می‌کند، بنابراین حاصل حد $+\infty$ خواهد بود.

۱۰۵ -(۳) حد صورت مبهم $\pm\infty\times۰$ را دارد که البته اگر m زوج باشد حد صورت مبهم $+\infty\times۰$ را دارد و اگر m فرد باشد حد صورت مبهم $-\infty\times۰$ را دارد. در اینجا نیز می‌توان یکی از عوامل را به مخرج منتقل نمود و از قاعده هوپیتال بهره گرفت، داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} x^m e^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^m}{e^{-x}}$$

اکنون اگر به طور مکرر از قاعده هوپیتال استفاده کنیم بعد از تعداد محدودی عملیات حد به صورت $\frac{۰}{+\infty}$ یا $\frac{۰}{-\infty}$ در می‌آید، که در هر صورت حد صفر می‌باشد.

۱۰۶ -(۳) مشابه آزمون ۹۷ عمل می‌کنیم خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-۲}\right)^x = exp \lim_{x\to+\infty} ln\left(\frac{x}{x-۲}\right)^x = exp\left[\lim_{x\to+\infty} x\, ln\left(\frac{x}{x-۲}\right)\right]$$

حد صورت مبهم $\infty\times۰$ را دارد ، یک عامل را به مخرج برده و از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم .

$$= exp \lim_{x\to+\infty} \frac{ln\frac{x}{x-۲}}{\frac{۱}{x}} = exp \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\frac{x-۲-x}{(x-۲)^۲} / \left(\frac{x}{x-۲}\right)\right]}{\frac{-۱}{x^۲}}$$

$$= exp \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲\times(-۲)\times(x-۲)}{-۱\times x(x-۲)^۲} = exp\ ۲ = e^۲$$

۱۰۷ -(۲) می‌توان از تغییر متغیر $u=۳^x$ استفاده نمود در این صورت وقتی $x\to+\infty$ عبارت u نیز به سمت $+\infty$ میل خواهد کرد، در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{۳^x-۵}{۴(۳^x+۲)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{u-۵}{۴(u+۲)} = \frac{۱}{۴}$$

۱۰۸ -(۳) اگر از تغییر متغیر $u=۳^x$ استفاده کنیم وقتی $x\to-\infty$ عبارت u به سمت صفر میل خواهد کرد، در این صورت خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۳^x-۵}{۴(۳^x+۲)}=\lim_{u\to۰}\frac{u-۵}{۴(u+۲)}=\frac{-۵}{۸}$$

۱۰۹ -(۲) هنگامیکه $x\to۰^+$ عبارات $\frac{۲}{x}$ و $\frac{x}{۲}$ به ترتیب به $+\infty$ و صفر میل می‌کنند و چون $e>۱$ بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to۰^+}(e^{۲/x}+e^{x/۲})=+\infty+e^۰=+\infty$$

۱۱۰ -(۳) حد صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ را دارد بنابراین با استفاده از قاعده هوپیتال خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to۰}\frac{a^x-۱}{x}=\lim_{x\to۰}\frac{\ln a\times a^x-۰}{۱}=\ln a\lim_{x\to۰}a^x=\ln a$$

۱۱۱ -(۲) هنگامیکه $x\to۰^-$ میل می‌کند عبارات $e^{-۲/x}$ و $e^{x^۲}$ به ترتیب به $+\infty$ و ۰ میل می‌کند و چون $e>۱$ است بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to۰^-}(e^{-۲/x}+e^{x^۲})=+\infty+e^۰=+\infty$$

۱۱۲ -(۳) حد صورت مبهم $۰\times+\infty$ را دارد بنابراین یکی از عوامل را به مخرج برده و از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم توجه داشته باشید که از انتخاب عبارتی که به مخرج می‌بریم در نتیجه تفاوتی حاصل نمی‌کند.

$$\lim_{x\to۰^+}x\ln x=\lim_{x\to۰^+}\frac{\ln x}{۱/x}=\lim_{x\to۰^+}\frac{۱/x}{۱/x^۲}=\lim_{x\to۰^+}(-x)=۰$$

۱۱۳ -(۲) حد صورت مبهم $(\pm\infty)-(\pm\infty)$ را دارد، پس ابتدا مخرج مشترک گرفته، بعد از آن دو بار از هوپیتال استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\lim_{x\to۱}\left(\frac{۱}{\ln x}-\frac{۱}{x-۱}\right)=\lim_{x\to۱}\frac{x-۱-\ln x}{(x-۱)\ln x}=\lim_{x\to۱}\frac{۱-۰-۱/x}{\ln x+۱/x(x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{۱-۱/x}{\ln x+۱-۱/x}=\lim_{x\to۱}\frac{۱/x^۲}{۱/x-۱/x^۲}=\lim_{x\to۱}\frac{۱}{x+۱}=\frac{۱}{۲}$$

۱۱۴ -(۱) هنگامیکه $x \to +\infty$ عبارت داخل پرانتز به سمت $\frac{۳}{۴}$ میل می‌کند و چون $\frac{۳}{۴}$ از یک کوچکتر است بنابراین حاصل حد برابر صفر است.

روش دوم :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{۳x^۲+x+۱}{۴x^۲-۳x-۲}\right)^x = exp\ [\ ln \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{۳x^۲+x+۱}{۴x^۲-۳x-۲}\right)^x\ ] =$$

$$exp\ [\ \lim_{x\to+\infty} ln\left(\frac{۳x^۲+x+۱}{۴x^۲-۳x-۲}\right)^x\ ] = exp \lim_{x\to+\infty} x\ ln \frac{۳x^۲+x+۱}{۴x^۲-۳x-۲} =$$

$$= exp\ (+\infty \times ln \frac{۳}{۴}) = exp\ (-\infty) = ۰$$

توجه کنید که $ln \frac{۳}{۴}$ منفی می‌باشد.

۱۱۵ -(۳) وقتی که $x \to ۰^+$ عبارت $ln\ x$ و $x^۲$ به ترتیب به $-\infty$ و صفر میل خواهند کرد، بنابراین خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to۰^+} (\ ln\ x + x^۲\ ) = (-\infty) - ۰ = -\infty$$

۱۱۶ -(۳) صورت کسر به سمت ۲- میل خواهد کرد و مخرج آن نیز به سمت صفر، چون وضعیت مخرج از لحاظ علامت نامعین است بنابراین حد مذکور $+\infty$ یا $-\infty$ است.

۱۱۷ -(۳) هنگامیکه $x \to +\infty$ عبارت داخل پرانتز به سمت ۸ میل می‌کند و توان آن نیز به سمت $\frac{۱}{۲}$ میل خواهد نمود، بنابراین حد عبارت داده شده برابر $\sqrt{۸}$ یا $۲\sqrt{۲}$ است.

روش دوم : مشابه روش دوم سؤال ۱۱۴ عمل کنید.

۱۱۸ -(۲) هنگامیکه $x \to \frac{\pi}{۴}$ عبارت $tan x$ به سمت یک میل خواهد کرد و بنابراین حد عبارت اخیر برابر ۱ ln یا صفر است.

۱۱۹ -(۴) وقتی $x \to ۵^+$ عبارت $[x+۳]$ برابر ۸ می‌باشد و داریم:

$$\lim_{x\to۵^+} (-۱)^{[x+۳]} \frac{x^۳-۸}{(x-۴)^۲} = (-۱)^۸ \frac{۵^۳-۸}{(۵-۴)^۲} = ۱۱۷$$

از طرفی وقتی $x\to 5^-$ عبارت $[x+3]$ برابر ۷ می‌باشد و در این حالت خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to 5^-} (-1)^{[x+3]} \frac{x^3-8}{(x-4)^2} = (-1)^7 \frac{5^3-8}{(5-4)^2} = -117$$

چون حد چپ و راست مساوی نیستند بنابراین تابع حد ندارد.

۱۲۰- (۱) $\frac{1}{n}\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\frac{i}{n})^2+1} = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = tan^{-1}x\Big]_0^1 = tan^{-1}1$

۱۲۱- (۱) مانند آزمون قبل عبارت برابر $\int_0^1 \frac{3}{2+x}dx$ یا $3ln\frac{3}{2}$ است.

۱۲۲- (۴) $\lim_{n\to+\infty} (ln\frac{n}{n} + ln\frac{n+1}{n} + \ldots + ln\frac{2n}{n})\frac{1}{n}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ln(1+\frac{i}{n})$$

هنگامیکه $i=0$ است عبارت $ln(1+\frac{i}{n})$ برابر صفر بوده و بی‌تأثیر است لذا داریم:

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ln(1+\frac{i}{n}) = \int_0^1 ln(1+x)\,dx$$

با استفاده از روش جزءبه جزء با فرض $u=ln(1+x)$ و $dv=dx$ داریم :

$$= x\,ln(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x\,\frac{dx}{1+x} = 1\times ln2 - 0ln1 - \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x}$$

برای محاسبه دومین انتگرال از تغییر متغیر $w=1+x$ و $dw=dx$ استفاده می‌کنیم، خواهیم داشت :

$$= ln2 - \int_0^1 \frac{w-1}{w}dw = ln2 - \int_0^1 (1-\frac{1}{w})\,dw = ln2 - w - ln\,w\Big]_0^1$$

$$= ln2 - [1+x - ln(1+x)] = ln2 - [2 - ln2 - (1 - ln1)] = 2ln2 - 1$$

روش دوم : با انتخاب $a=1$ و $b=2$ و $f(x)=ln\,x$ محاسبات بصورت ساده‌تری انجام می‌شود و خواهیم داشت :

$$(ln\frac{n}{n} + ln\frac{n+1}{n} + ln\frac{n+2}{n} \ldots + ln\frac{2n}{n})$$

$$= \int_1^2 ln\, x\, dx = x\, ln\, x \Big]_1^2 \quad \int_1^2 x\frac{dx}{x} = 2ln2 - x \Big]_1^2$$

$$= 2ln2 - (2-1) = 2ln2 - 1$$

۱۲۳ -(۳) هنگامیکه x تغییر می‌کند عبارت $x-[x]$ در فاصله $[0,1)$ محدود است یعنی عبارت $x-[x]$ همواره بین دو عدد صفر و یک قرار دارد از طرفی وقتی $x \to +\infty$ و $\sqrt[5]{x}$ نیز به سمت $+\infty$ میل خواهد کرد در اینصورت چون $\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$ و $x-[x]$ کراندار است بنابراین خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-[x]}{\sqrt[5]{x}} = 0$$

۱۲۴ -(۱) حد داده شده بصورت زیر محاسبه می‌شود :

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \times 1 = +\infty$$

۱۲۵ -(۲) حد صورت مبهم $\frac{+\infty}{+\infty}$ را دارد، با استفاده از قاعده هوپیتال خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-2x}}{x - e^{-2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 2e^{-2x}}{1 + 2e^{-2x}} = +\infty$$

۱۲۶ -(۲) در اینجا نیز صورت مبهم $(+\infty)-(+\infty)$ پیش می‌آید و با توجه به این نکته که برای اعداد بزرگ وقتی $a>1$ است عبارت a^x به مراتب بزرگتر از x^a است حاصل حد داده شده برابر $-\infty$ خواهد بود در اینجا $a=e>1$ است.

۱۲۷ -(۱) در اینجا نیز صورت مبهم $\frac{+\infty}{+\infty}$ حاصل می‌گردد که با استفاده از هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(1+x)}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+x} = 0$$

۱۲۸ -(۱) صورت مبهم $\frac{0}{0}$ داریم :

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

۱۲۹ -(۳) حاصل گزینه ۳ برابر عرض پاره‌خط افقی است.

۱۳۰ -(۴) طرفین تساوی گزینه ۴ برابر صفر هستند.

۱۳۱ -(۱) حاصل حد برابر ۴ است.

۱۳۲ -(۳) حد راست و چپ y در صفر برابر صفر است.

۱۳۳ -(۱) اگر تابع داده شده را در x^2+1 ضرب و تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{(x^2+1)(x^2-1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1)}{x^2+1} = \frac{x^{32}-1}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{32x^{31}(x^2+1)-2x(x^{32}-1)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow$$

$$f'(2) = \frac{[32\times 2^{31}\times 5]-[2\times 2(2^{32}-1)]}{5^2} = \frac{2^{34}\times 19+4}{25}$$

روش دوم : می‌توان $f(x)$ را به عنوان حاصلضرب ۴ تابع در نظر گرفت و از آن مشتق‌گیری نمود

۱۳۴ -(۱) می‌توان تابع را بصورت $y=\frac{1}{2^{14}}sin2x$ نوشت داریم

$$y'=\frac{1}{2^{13}}cos2x \Rightarrow y^{(15)}=2(-cos2x) \Rightarrow$$

$$y^{(15)}\Big|_{x=-\pi/12}=2(-cos\frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}$$

۱۳۵ -(۲) اگر فرض کنیم $u=\sqrt[5]{(7x^2-32)^2} = (7x^2-32)^{2/5}$ آنگاه :

$$u' = \frac{2}{5}(14x)(7x^2-32)^{-3/5}$$ ، اکنون اگر فرض کنیم

$$v=[14x+\sqrt[5]{(7x^2-32)^2}]$$

آنگاه خواهیم داشت :

$$f'(x)=\frac{1}{7}v'v =$$

$$\frac{1}{7}\left(14+\frac{28}{5}x(7x^2-32)^{-3/5}\right)\left(14x+\sqrt[5]{(7x^2-32)^2}\right)^{-6/7}$$

$$\Rightarrow f'(۰)=\frac{۱}{۷}(۱۴+۰)(۰+۴)^{-۶/۷}=۲\times۴^{-۶/۷}=\frac{۲}{\sqrt[۷]{۲^{۱۲}}}=\frac{\sqrt[۷]{۴}}{۲}$$

روش دوم :

$$f'(x)=\frac{۱۴+\frac{۲(۱۴x)}{۵\sqrt[۵]{(۷x^{۲}-۳۲)^{۲}}}}{۷\sqrt[۷]{(۱۴x+۵\sqrt[۵]{(۷x^{۲}-۳۲)^{۲}})^{۶}}}$$

$$f'(۰)=\frac{۱۴}{۷\sqrt[۷]{۴^{۶}}}=\frac{۲}{\sqrt[۷]{۲^{۱۲}}}=\frac{\sqrt[۷]{۴}}{۲}$$

۱۳۶ -(۲) مشتق حاصلضرب n عبارت برابر است با مجموع n عبارت که هر عبارت برابر است با مشتق یکی از عبارات ضربدر بقیه، در این مسئله مشتق $f(x)$ مجموعی از صد عامل خواهد بود، که هر عامل حاصلضرب مشتق یکی از عبارات در بقیه می‌باشد توجه کنید که از صد عامل ۹۹ عامل مضربی از $(x-۱)$ است و اولین عامل برابر $(x-۱)(۲x-۱)(۳x-۱)...(۱۰۰x-۱)$ بنابراین $f(-۱)=(-۲)(-۳)...(-۱۰۱)=۱۰۱!$ و نیز $f'(۱)=۲\times۳\times...\times۹۹+۰=۹۹!$ در نتیجه $f'(۱)\,f(-۱)=۹۹!۱۰۱!$.

۱۳۷ -(۱) $f(x)=(m+۱)\cos(\frac{\pi}{۳}-x)\Rightarrow f'(x)=(m+۱)\sin(\frac{\pi}{۳}-x)$

$$f'(-\frac{\pi}{۳})=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow (m+۱)\sin(\frac{\pi}{۳}-(-\frac{\pi}{۳}))=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow (m+۱)(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow m+۱=-۱\Rightarrow m=-۲$$

۱۳۸ -(۳)

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\alpha}}{\frac{dx}{d\alpha}}=\frac{۶\cos ۳\alpha}{۳(۱+\tan^{۲}۳\alpha)}$$

$$=\frac{۲\cos ۳\alpha}{۱+\tan^{۲}۳\alpha}=۲\cos^{۳}۳\alpha$$

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۲x+۳y-۱}{۲y+۳x+۱} = \frac{۱-۲x-۳y}{۳x+۲y+۱}$$ (۳)- ۱۳۹

$$[f(x^{۷۷}+۷۶)]' = g'(x).f'(g(x)) = (۷۷x^{۷۶})f'(x^{۷۷}+۷۶)$$ (۲)- ۱۴۰

۱۴۱ -(۴) با توجه به قاعده زنجیره‌ای داریم :

$$y' = u'(۹u^۲+۲u)=۶\ sin\ ۳x \times cos\ ۳x(۹sin^۴۳x+۲sin\ ^۲۳x)$$

$$y'\ |_{x=\pi/۳} = ۶sin\ \pi \times cos\ \pi(۹\ sin^۴\pi + ۲sin^۲\pi) = ۰$$

۱۴۲ -(۱) با توجه به قاعده زنجیره‌ای و روابط داده‌شده خواهیم داشت :

$$\begin{cases} (fog)'(x) = ۶x^۲ \\ f'(x) = ۱۵x^۴ \\ (fog)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) \end{cases}$$

از سومین رابطه و اولین رابطه خواهیم داشت :

$$g'(۱) = \frac{۶}{f'(g(۱))}$$

برای محاسبه $g(۱)$ خواهیم داشت :

$$f(g(۱)) = ۲$$

$$f(g(۱)) = ۳(g(۱))^۵ \Rightarrow g(۱) = \sqrt[۵]{\frac{۲}{۳}}$$

$$g'(۱) = \frac{۶}{f'(g(۱))} = \frac{۶}{f'(\sqrt[۵]{۲/۳})} = \frac{۶}{۱۵\sqrt[۵]{(۲/۳)}} = \frac{۳}{۵}\sqrt[۵]{\frac{۲}{۳}} = \frac{\sqrt[۵]{۱۶۲}}{۵}$$

روش دوم : ابتدا ضابطه $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم سپس $g'(۱)$ را بدست می‌آوریم .

$$(fog)(x) = ۲x^۳ \qquad f(x) = ۳x^۵$$

$$۳(g(x))^۵ = ۲x^۳ \Rightarrow [g(x)]^۵ = \frac{۲}{۳}x^۳ \Rightarrow g(x) = \sqrt[۵]{\frac{۲}{۳}}\ x^۳$$

$$\Rightarrow g(x) = \sqrt[۵]{\frac{۲}{۳}}x^{۳/۵} \Rightarrow g'(x) = \sqrt[۵]{\frac{۲}{۳}} \times \frac{۳}{۵}x^{-۲/۵}$$

$$g'(۱) = \sqrt[۵]{\frac{۲}{۳}} \times \frac{۳}{۵}(۱)^{-۲/۵} = \frac{۵\sqrt{۱۶۲}}{۵}$$

۱۴۳ -(۳) با فرض $u=۲x$ خواهیم داشت.

$$(e^{۲x})' = (e^u)' = u' e^u = ۲e^{۲x}$$

۱۴۴ -(۳) با استفاده از متغیر $u=x^۲$ خواهیم داشت :

$$(e^{x^۲})' = (e^u)' = ۲xe^{x^۲}$$

۱۴۵ -(۱) به صورت مستقیم نمی‌توان از این رابطه مشتق گیری نمود باید رابطه را به صورت ضمنی نوشت و با استفاده از مشتق تابع ضمنی محاسبه را انجام داد.

$$y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \ldots}}} \Rightarrow$$

$$y^۲ = \sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \ldots}} \Rightarrow y^۲ = \sin x + y$$

$$\Rightarrow y^۲ - y - \sin x = ۰ \Rightarrow y' = -\frac{f_x'}{f_y'} = -\frac{-\cos x}{۲y-۱} = \frac{\cos x}{۲y-۱}$$

۱۴۶ -(۱) با توجه به قاعده زنجیری خواهیم داشت :

$$y'(x) = y'(u) \times u' = (۴u-۱)(۲\cos ۲x) = (۴\sin ۲x-۱)(۲\cos ۲x)$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{۶}\right) = (۴\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۱)(۲\frac{۱}{۲}) = ۲\sqrt{۳}-۱$$

۱۴۷ -(۴) با توجه به قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$g'(x) = \cos x\, f'(\sin x) \Rightarrow g'(\pi) = \cos\pi\, f'(\sin\pi)$$

$$\Rightarrow ۲ = (-۱)f'(۰) \Rightarrow f'(۰) = -۲$$

۱۴۸ -(۲) دو بار از قاعده زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم، خواهیم داشت :

$$f'(x) = -۸x\, g'(۱-۴x^۲) \Rightarrow$$

$$f''(x) = -۸g'(۱-۴x^۲) + [-۸x\, g''(۱-۴x^۲)](-۸x)$$

اکنون در تساوی آخر بجای x مقدار صفر را قرار می‌دهیم ، خواهیم داشت:

$$f''(۰) = -۸\,g'(۱)+۰ \Rightarrow g'(۱) = -\frac{۱}{۸}\,f''(۰) = -۲$$

۱۴۹ -(۴) با توجه به فرمول تابع پارامتری به ازای $t=\frac{\pi}{۴}$ داریم :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{۳a\ cost \times sin^{۲}t}{-۳a\ sint \times cos^{۲}t} = -\tan t \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\pi/۴} = -\tan\frac{\pi}{۴} = -۱$$

به ازای $t=\frac{\pi}{۴}$ نقطه $A(a\frac{\sqrt{۲}}{۴}, a\frac{\sqrt{۲}}{۴})$ حاصل می‌شود و معادله خط مماس به صورت زیر است :

$$y-a\frac{\sqrt{۲}}{۴} = -(x-a\frac{\sqrt{۲}}{۴}) \quad \text{یا} \quad y=-x+a\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۵۰ -(۱) زمانی $\underline{max}$ تابع برابر $\underline{min}$ آن می‌باشد که تابع ثابت باشد و اگر m به سمت $-\infty$ و ∞ میل کند تابع بصورت ثابت $y=-۲$ در می‌آید.

۱۵۱ -(۱) محل تقاطع خط $y+x+۱=۰$ با محور طولها نقطه‌ای به عرض صفر است یعنی $y=۰$ و $x=-۱$. اکنون برای یافتن معادله مماس مشتق گیری نموده ، مقدار مشتق به ازای $x=-۱$ شیب خط مماس بر منحنی است . اگر مشتق به ازای $x=-۱$ بی معنی باشد خط مماس عمودی بوده و خود $x=-۱$ معادله خط مماس است .

$$f'(x)=\frac{۱}{۵}(۳x^{۲})(x^{۳}+۱)^{-۴/۵} = \frac{۳x^{۲}}{۵\sqrt[۵]{(x^{۳}+۱)^{۴}}} \Rightarrow f'(-۱) \text{ بی‌معنی}$$

۱۵۲ -(۲) اگر مشتق تابع همواره منفی باشد ، تابع همواره نزولی است ، از آنجاکه $y'(x) = -۳x^{۲}+۲mx-۲۷$ عبارتی درجه ۲ است و ضریب $x^{۲}$ منفی است ، باید مجموعه m هایی را مشخص کنیم که $\Delta \leq ۰$ ، داریم :

$$\Delta' = m^{۲}-۸۱ \leq ۰ \Rightarrow m^{۲} \leq ۸۱ \Rightarrow -۹ \leq m \leq ۹$$

۱۵۳ -(۳) منحنی از نقطه $(-۲, -۱)$ می‌گذرد و شیب مماس بر منحنی در این نقطه برابر $f'(-۱)$ می‌باشد.

داریم: $f'(x) = ۳x^۲ - ۳x^{-۴} \Rightarrow f'(-۱) = ۳-۳ = ۰$

از آنجاکه شیب مماس بر منحنی صفر است، شیب خط قائم بر منحنی بی معنی می‌باشد، بنابراین خط قائم بر منحنی موازی محور yها می‌باشد.

۱۵۴ -(۳) باید مقادیری از m را تعیین کنیم که y' مثبت باشد داریم:

$$y' = \frac{m-(m-۲x)-(-۲)(mx-۲)}{(m-۲x)^۲} = \frac{m^۲-۴}{(m-۲x)^۲} > ۰ \Rightarrow m^۲-۴>۰$$

$$\Rightarrow m>۲ \text{ یا } m<-۲$$

۱۵۵ -(۲) وقتی $x=۱$ ، $y=-۱$ بوده و مشتق تابع نیز برابر است با

$$f'(x) = -\frac{f_x'}{f_y'} = -\frac{۲x+y}{x+۲y} = f'(۱) = -\frac{۲-۱}{۱-۲} = ۱$$

چون شیب مماس ۱ است شیب قائم برابر ۱- است.

۱۵۶ -(۴) باید معادله $y'=۰$ سه ریشه داشته باشد، داریم:

$$y' = ۸x^۳ - ۶x^۲ + ۲m^۲x = ۲x(۴x^۲ - ۳x + m^۲) = ۰$$

یکی از ریشه‌های معادله اخیر $x=۰$ می‌باشد و برای آنکه معادله دو ریشه دیگر داشته باشد باید داشته باشیم:

$$\Delta = ۹-۱۶m^۲>۰ \Rightarrow m^۲<\frac{۹}{۱۶} \Rightarrow -\frac{۳}{۴}<m<\frac{۳}{۴}$$

۱۵۷ -(۴) هنگامیکه $\alpha=\frac{\pi}{۲}$ است نقطه $(۲, -۱)$ حاصل می‌شود. شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر است با:

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{a=\pi/۲} = \frac{\frac{dy}{d\alpha}}{\frac{dx}{d\alpha}}\Big|_{a=\pi/۲} = \frac{-۲\sin\alpha}{۲\cos\alpha}\Big|_{a=\pi/۲} = -\infty$$

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه $(۲, -۱)$ برابر صفر می‌باشد بنابراین معادله

خط قائم $y-۲=۰(x-(-۱))$ یا $y=۲$ است.

۱۵۸- (۳) $y' = -۳(\sec x \times \tan x) = ۰ \Rightarrow \tan x = ۰$

معادله اخیر در فاصله $[۰, ۲\pi]$ دارای ریشه‌های ۰ و π و ۲π می‌باشد، توجه کنید که به ازای ریشه‌های مشتق که البته همگی جزء دامنه هستند، مشتق تغییر علامت می‌دهد و بنابراین تابع سه اکسترمم دارد.

۱۵۹- (۳) نقطه A نقطه عطف تابع است چون اولاً $x=\frac{-۲}{۳}$ ریشه مشتق دوم است، ثانیاً مشتق دوم در این نقطه تغییر علامت می‌دهد، ثالثاً $f(\frac{-۲}{۳})=۲$ می‌باشد. از طرفی در تابع درجه ۳ نقطه عطف مرکز تقارن می‌باشد بنابراین گزینه ۳ درست است.

۱۶۰- (۳) با توجه به فرضها $f'(-۲)=\frac{۳}{۲}$. توجه کنید که شیب خط $-\frac{۲}{۳}$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$f'(-۲) = ۳(-۲)^۲+p = \frac{۳}{۲} \quad \Rightarrow \quad p = -\frac{۲۱}{۲}$$

۱۶۱- (۱) البته معادله خط مماس خواسته شده را بدست می‌آوریم، خط از نقطه $(-۱, f(-۱))$ یا $(-۱, ۲)$ می‌گذرد و شیب خط مماس برابر $f'(-۱) = ۲(-۱)-۵ = -۷$ بنابراین خط مماس به صورت زیر است

$$y-۲ = -۷(x+۱) \quad \text{یا} \quad y+۷x+۵ = ۰$$

اکنون فاصله نقطه $A(۱,-۱۲)$ از این خط برابر است با:

$$d=\frac{|-۱۲+۷+۵|}{\sqrt{۱+۴۹}} = ۰$$

۱۶۲- (۲) $f'(x) = ۸(۲x+۶)^۳ = ۰ \Rightarrow x=-۳$

چون f' در فاصله $(-۳,-\infty)$ منفی و روی $(-۳,+\infty)$ مثبت است، بنابراین نقطه داده شده مینیمم نسبی می‌باشد.

۱۶۳ -(۳) بنا به فرض اولاً $f(-۲)=۲$ و ثانیاً $f'(-۲)=۰$ داریم.

$$\begin{cases} f(-۲) = -۸+۴p-۲q+۴=۲ \\ f'(-۲) = ۱۲-۴p+q=۰ \end{cases} \Rightarrow ۴+۴-q=۲ \Rightarrow q=۶ \text{ و } p=\frac{۱۸}{۴}$$

بنابراین $p+q$ برابر $\frac{۹}{۲}+۶$ یا $\frac{۲۱}{۲}$ است.

۱۶۴ -(۲) چون $y' = ۲x+۳$ دارای ریشه $x=-\frac{۳}{۲}$ است بنابراین y' روی فاصله $(-\frac{۳}{۲}, +\infty)$ مثبت و در فاصله $(-\infty, -\frac{۳}{۲})$ منفی است، بنابراین در فاصله‌های داده شده تابع به ترتیب نزولی و صعودی است.

۱۶۵ -(۴) فاصله نقطه $(x, x^۲-۱)$ از مبدأ را بعنوان تابعی از x محاسبه نموده و با استفاده از مشتق کمترین مقدار آنرا معین می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$d=\sqrt{x^۲+(x^۲-۱)^۲} = \sqrt{x^۴-x^۲+۱} \Rightarrow d' = \frac{۴x^۳-۲x}{۲\sqrt{x^۴-x^۲+۱}} = ۰$$

$$\Rightarrow ۴x^۳-۲x=۰ \Rightarrow ۲x(۲x^۲-۱) = ۰ \Rightarrow x=۰ \text{ و } x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

به ازای $x=۰$ و $d=۱$ و به ازای $x= \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $d=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ حاصل می‌شود که کمترین مقدار فاصله است.

روش دوم: می‌توان بجای d مینیمم $d^۲$ را یافت و از آن جذر گرفت.

۱۶۶ -(۲) توجه کنید که $f'(x) = ۲x-۶$ روی فاصله $(-\infty, ۳)$ منفی و روی فاصله $(۳, +\infty)$ مثبت است بنابراین مینیمم تابع به ازای $x=۳$ حاصل می‌شود و برابر صفر است و ماکزیمم تابع در یکی از دو نقطه ۱ یا ۵ حاصل می‌شود و برابر ۴ می‌باشد، بنابراین برد تابع فاصله $[۰, ۴]$ می‌باشد.

۱۶۷ -(۲) نقطه عطف ریشه مشتق دوم است داریم:

$$y' = -۳x^۲+۶x \Rightarrow y'' = -۶x+۶=۰ \Rightarrow x=۱$$

ضریب زاویه خط مماس در نقطه عطف برابر $y' \mid_{x=1} = 3$ است و در نتیجه ضریب زاویه خط قائم برابر $-\frac{1}{3}$ است.

۱۶۸ -(۴) باید $x=-2$ ریشه مشتق باشد، یعنی $y' \mid_{x=-2} = 0$

$$y'=2(m-1)x+m \Rightarrow 2(m-1)(-2)+m = 0 \Rightarrow m=\frac{4}{3}$$

۱۶۹ -(۳) از آنجا که نقطه عطف بر نیمساز ربع اول و سوم واقع است، به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ مقدار تابع $\frac{\pi}{2}$ است داریم:

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow k-s=\frac{\pi}{2}$$

۱۷۰ -(۱) اگر α ریشه مشتق باشد بنا به فرض $f(\alpha) = -\frac{1}{4}$

$$y' = 2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow f(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+m = -\frac{1}{4} \Rightarrow m=2$$

۱۷۱ -(۴) باید عرض نقطهٔ می‌نیمم برابر صفر باشد

$$y'=2x-m = 0 \Rightarrow x=\frac{m}{2} \Rightarrow (\frac{m}{2})^2-m\frac{m}{2}+m-1 = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{m^2}{4}+m-1 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}(m-2)^2 = 0 \Rightarrow m=2$$

روش دوم: باید معادلهٔ $x^2-mx+m-1=0$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، در نتیجه $m^2-4(m-1)=0$ یا $m=2$ است.

۱۷۲ -(۴) در تابع درجه ۳ همواره نقطه عطف وسط نقاط ماکزیمم و مینیمم است در نتیجه $x=4$ ریشه مشتق دوم است، یعنی داریم:

$$y' = 3x^2+6mx+3m^2 \Rightarrow y''=6x+6m$$

به ازای $x=۴$ ، y'' برابر صفر می‌باشد بنابراین $۶\times۴+۶m = ۰ \Rightarrow m=-۴$

روش دوم : در تابع درجه ۳، $y=ax^۳+bx^۲+cx+d$ طول نقطه عطف همواره برابر $x=-\frac{b}{۳a}$ می‌باشد بنابراین در اینجا $-\frac{۳m}{۳}=۴$ یا $m=-۴$.

روش سوم : طول نقاط ماکزیمم و مینیمم همان ریشه‌های مشتق است و ریشه‌های مشتق عبارتند از :

$$x = \frac{-۳m \pm \sqrt{۹m^۲-۹m^۳}}{۳} = -m \pm m\sqrt{۱-m}$$

اکنون طول وسط پاره خط واصل بین نقاط ماکزیمم و مینیمم برابر است با ۴ یعنی داریم :

$$۴ = \frac{-m+m\sqrt{۱-m}-m-m\sqrt{۱-m}}{۲} \Rightarrow \frac{-۲m}{۲} = ۴ \Rightarrow m = -۴$$

۱۷۳ -(۲) اگر فرض کنیم x طول مستطیل و y عرض مستطیل است ، آنگاه $۲x+۲y = ۲۴$ بوده و باید ماکزیمم مقدار $S=xy$ را حساب کنیم ، از تساوی اول $y = ۱۲-x$ حاصل می‌شود ، داریم :

$$S = x(۱۲-x) = ۱۲x-x^۲ \Rightarrow S' = ۱۲-۲x = ۰ \Rightarrow x = ۶$$

اگر $x=۶$ باشد، y نیز مساوی ۶ خواهد بود و در این حالت ماکزیمم مساحت حاصل می‌شود که برابر ۳۶ است.

روش دوم : اگر مجموع دو عبارت مثبت باشد، حاصلضرب آنها زمانی بیشترین مقدار است که آن دو مساوی باشند .

۱۷۴ -(۲) $f'(x)=۶x^۲-۶px=۰ \Rightarrow x=۰ \text{ و } x=p$

بنابراین $f(۰)=۰$ و $f(p)=-p^۳$ نقاط اکسترمم تابع هستند چون ماکزیمم تابع ۸ می‌باشد در نتیجه $f(p)=-p^۳=۸$ یا $p=-۲$.

۱۷۵ -(۲) معادله به صورت $x(۲x^۳+۳x^۲+۶x+۵) = ۰$ می‌نویسیم در این صورت $x = ۰$ یک جواب معادله می‌باشد، اکنون باید تعداد جوابهای معادله $۲x^۳+۳x^۲+۶x+۵ = ۰$ را بدست آورد .

اگر فرض کنیم $f(x) = ۲x^۳+۳x^۲+۶x+۵$ آنگاه $f'(x) = ۶x^۲+۶x+۶$ همواره مثبت است، توجه کنید که معادله $۶x^۲+۶x+۶ = ۰$ یا $x^۲+x+۱=۰$ ریشه ندارد بنابراین مشتق تابع همواره مثبت است، یعنی تابع $f(x)$ صعودی می‌باشد و تابع صعودی از درجه ۳ تنها یک ریشه دارد، بنابراین، معادله مجموعاً دو ریشه دارد.

روش دوم :(نکته) اگر در معادله درجه n $a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \ldots + a_۱ x + a_۰ = ۰$ مجموع ضرایب صفر باشد، $x=۱$ یک ریشه معادله است و اگر ضرایب را با علامت یک در میان مثبت و منفی با یکدیگر جمع کنیم و مجموع صفر شود $x=-۱$ ریشه معادله است، به عبارتی اگر

$$a_n - a_{n-۱} + a_{n-۲} - a_{n-۳} + a_{n-۴} + \ldots + (-۱)^{n+۱} a_۰ = ۰$$

آنگاه $x = -۱$ یک ریشه معادله است.

اکنون برای معادله $۲x^۳ + ۳x^۲ + ۶x + ۵ = ۰$ تساوی $۲-۳+۶-۵=۰$ برقرار است. بنابراین $x=-۱$ نیز یک ریشه معادله است، با تجزیه عبارت موجود در معادله اخیر خواهیم داشت :

$$۲x^۳+۳x^۲+۶x+۵ = ۰ \quad \Rightarrow \quad (x+۱)(۲x^۲+x+۵) = ۰$$

در آخرین مرحله ملاحظه می‌کنید که معادله $۲x^۲+x+۵ = ۰$ جواب ندارد در نتیجه معادله دارای دو جواب صفر و ۱- است .

۱۷۶ -(۴) اگر عبارت $(۱-m)x^۳ + mx$ را برحسب m بنویسیم به صورت $x^۳ + m(x - x^۳)$ در می‌آید، اکنون ضریب m را مساوی صفر قرار دهیم، خواهیم داشت :

$$x - x^۳ = ۰ \quad \Rightarrow \quad x=۱ \quad و \quad x=۰ \quad و \quad x=-۱$$

ملاحظه می‌کنید که به ازای سه طول داده شده مقدار m بی‌تأثیر خواهد بود و در نتیجه تابع همواره از نقاط $(۱,۱)$ و $(۰,۰)$ و $(-۱,۱)$ خواهد گذشت.

۱۷۷ -(۳) با توجه به پاسخ سؤال ۱۷۲ طول نقطه عطف منحنی $x=-\frac{b}{۳a}=\frac{-۲}{۳\,(-۲/۳)}=۱$ می‌باشد و عرض نقطه عطف برابر $f(۱)=\frac{۱}{۳}$ است. پس نقطه عطف $(۱, \frac{۱}{۳})$ بوده و فاصله این نقطه از خط $y+x=۰$ برابر است با :

$$d=\frac{|\,۱/۳+۱\,|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۴/۳}{\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

۱۷۸ -(۳) با توجه به پاسخ تست ۱۷۲ تساوی $\frac{-p}{۳}=-۱$ یا $p=۳$ حاصل می‌شود، از طرفی

$$f(-۱)=-۲ \;\Rightarrow\; (-۱)^۳+p(-۱)^۲+q=-۲\Rightarrow q=-۴\Rightarrow pq=-۱۲$$

۱۷۹ -(۳) واضح است که معادله پس از ساده شدن به یک معادله درجه ۳ تبدیل می‌شود و معادله درجه ۳ حد اقل یک جواب دارد. اما اگر فرض کنیم :

$$f(x)=(x-۱)^۳+(x-۲)^۳+\ldots+(x-۷۶)^۳$$

$$\Rightarrow\; f'(x)=۳((x-۱)^۲+\ldots+(x-۷۶)^۲)$$

واضح است که f' ، سه برابر مجموع ۷۶ عبارت نا منفی است که البته حد اقل ۷۵ تای آنها مثبت می‌باشند ، بنابراین f همواره اکیداً صعودی بوده و معادله داده شده دقیقاً یک ریشه دارد .

۱۸۰ -(۳) مشتق تابع یعنی $y'=۳x^۲+۲x-۵$ روی فاصله $(-\frac{۵}{۳}, ۱)$ منفی و روی فواصل $(۱, +\infty)$ و $(-\infty, -\frac{۵}{۳})$ مثبت است در نتیجه y روی فواصل مذکور بترتیب نزولی و صعودی است.

۱۸۱ -(۱) تابع در نقاط $-\frac{\pi}{۲}$ ، $\frac{\pi}{۲}$ ، $\frac{۳\pi}{۲}$ دارای اکسترمم است و چون از بین مقادیر $f(-\frac{\pi}{۲})=e^{-۱}$ و $f(\frac{\pi}{۲})=e$ و $f(\frac{۳\pi}{۲})=e^{-۱}$ و $f(-\pi)=۱$ و

۱ = $f(2\pi)$ مقدار $f(\frac{\pi}{2}) = e$ بیشترین مقدار، و ماکزیمم تابع همان e است.

$y' = e^x - 2 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$ (۴)- ۱۸۲

در نقطه بطول $x = \ln 2$ تابع ماکزیمم $f(\ln 2) = 2 - 2\ln 2$ را اختیار می‌کند.

$y' = e^x - 2 = 0 \Rightarrow x = \ln 2$ (۱)- ۱۸۳

از بین مقادیر $f(0) = 1$ و $f(1) = e - 2$ و $f(\ln 2) = 2 - 2\ln 2$ مقدار $e - 2$ مینیمم است.

۱۸۴ -(۱) با فرض $u = \sin x$ داریم:

$y' = (3^{\sin x})' = (3^u)' = u'.3^u = \cos x.3^{\sin x}$

۱۸۵ -(۳) تابع $y = a^x$ برای $a > 1$ صعودی و برای $0 < a < 1$ نزولی است.

$\lim_{x \to 0} \frac{3^{\sin x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x.3^{\sin x}}{1} = 1$ (۲)- ۱۸۶

روش دوم: بنابر تعریف مشتق حد خواسته شد برابر $f'(0)$ است وقتی $f(x) = 3^{\sin x}$ بنابراین $f'(0) = \cos 0\ 3^{\sin x} = 1$.

۱۸۷ -(۴) با فرض $u = 3x + 1$ داریم:

$y' = (\log_{10}(3x+1))' = (\log_{10} u)' = \frac{u'}{u \ln 10} = \frac{3}{(3x+1)\ln 10}$

$y = x^2 e^{\sqrt{x}} \Rightarrow y' = 2xe^{\sqrt{x}} + (\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}})x^2$ (۴)- ۱۸۸

$= (2x + \frac{1}{2}x\sqrt{x})\, e^{\sqrt{x}}$

۱۸۹ -(۲) در اینجا پایه و توان هر دو تابعی از x می‌باشند از طرفین $\ln$ می‌گیریم و سپس مشتق گیری می‌کنیم، داریم:

$\ln y = \ln (x - \sqrt{x})^{\sin^{-1} x} = \sin^{-1} x \ln (x - \sqrt{x}) \Rightarrow$

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ln (x - \sqrt{x}) + \frac{1 - 1/2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} \sin^{-1} x \Rightarrow$

$$y' = y\left[\frac{ln(x-\sqrt{x})}{\sqrt{۱-x^۲}} + \frac{۲\sqrt{x}-۱}{۲x\sqrt{x}-۲x}\sin^{-۱}x\right] =$$

$$(x-\sqrt{x})^{\sin^{-۱}x}\left[\frac{ln(x-\sqrt{x})}{\sqrt{۱-x^۲}} + \frac{۲\sqrt{x}-۱}{۲x\sqrt{x}-۲x}\sin^{-۱}x\right]$$

۱۹۰ -(۲) ابتدا مشتق تابع را یافته و سپس آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم :

$$y' = e^{-x}+(-e^{-x})x = (۱-x)e^{-x}=۰ \Rightarrow x=۱$$

$x=۱$ تنها اکسترمم تابع بوده و داریم : $f(۱)=e^{-۱}$

۱۹۱ -(۳) دو بار مشتق می‌گیریم ، اگر در ریشه مشتق دوم y'' تغییر علامت دهد، نقطه عطف بوقوع می‌پیوندد .

$$y'' = -e^{-x}+\left(-e^{-x}(۱-x)\right) = (-۲+x)e^{-x}$$

ملاحظه می‌کنید که $x=۲$ ریشه معادله $y''=۰$ است و y'' به ازای این ریشه تغییر علامت می‌دهند و نقطهٔ $(۲, ۲e^{-۲})$ نقطهٔ عطف است.

۱۹۲ -(۱) با تغییر متغیر $u=x^۲$ خواهیم داشت :

$$y' = (۳^{x^۲})' = (۳^u)' = u'(ln۳)۳^u = ۲x(ln۳)۳^{x^۲}$$

۱۹۳ -(۳) باید از فرمول مشتق تابع ضمنی استفاده کنیم :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ye^x+e^y+۱}{e^x+xe^y+۱}$$

۱۹۴ -(۱) $y = lnx \Rightarrow y' = \frac{۱}{x} \Rightarrow m = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y - ln۲ = \frac{۱}{۲}(x-۲)$

$$\Rightarrow y = \frac{۱}{۲}x + ln۲-۱$$

۱۹۵ -(۱) $y' = lnx + x\frac{۱}{x} = lnx +۱ \Rightarrow$ شیب $= f'(e) = ۱+۱ = ۲$

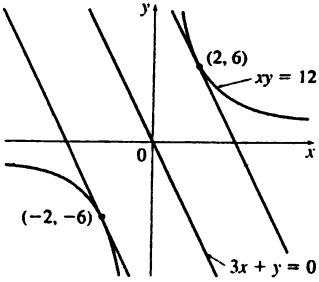
۱۹۶ -(۳) ابتدا می‌توان تابع را بصورت $y=xe^{۲x}$ نوشت و مشتق گرفت.

۱۹۷ -(۴) $y' = \frac{۱}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{۱}{x^۲} \Rightarrow y''(۱۰) = -\frac{۱}{۱۰^۲} = -۱۰^{-۲}$

۱۹۸- (۴) $y = x^x \Rightarrow lny = lnx^x = xlnx \Rightarrow \frac{y'}{y} = lnx + x \cdot \frac{۱}{x}$

$\Rightarrow y' = y\,(lnx + ۱) = x^x(lnx + ۱)$

۱۹۹- (۳) نمودار $xy = ۱۲$ یا $y = \frac{۱۲}{x}$ یک تابع هموگرافیک بشکل مقابل است و موازی هر خط با شیب منفی می‌توان دو مماس بر منحنی رسم نمود.



۲۰۰- (۳) ملاحظه می‌کنید که در صفر تابع صعودی است و شیب آن بی‌نهایت است.

۲۰۱- (۱) واضح است که منحنی به سمت بالا می‌باشد.

۲۰۲- (۴) توجه کنید تابع روی R صعودی است.

۲۰۳- (۳) در نمودار دیده می‌شود که سه ماکزیمم و مینیمم نسبی وجود دارد.

۲۰۴- (۳) تابع در $x = ۰$ مشتق ندارد در نتیجه مشتق دوم هم ندارد.

۲۰۵- (۴) در تمام نقاطی که تابع شکستگی دارد مشتقپذیر نیست.

۲۰۶- (۱) اگر x و y بترتیب فاصله پای نردبان از پای دیوار باشد. بنابه فرض $\frac{dx}{dt} = ۳$ و $x = ۱۵$ و $x^۲ + y^۲ = ۲۵^۲$ در نتیجه:

$$۲x\frac{dx}{dt} + ۲y\frac{dy}{dt} = ۰ \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} = -\frac{۱۵}{۲۰} \times ۳ = -\frac{۹}{۴}$$

۲۰۷- (۴) وقتی $x = ۱$، $y = ۰$ است داریم:

$$۳x^۲ D_t x - ۲x D_t x - ۴y^۳ D_t y + D_t y = ۰ \Rightarrow (۳-۲)D_t x + ۰ + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow D_t x = -۱$$

۲۰۸- (۱) $۲D_t x + ۳D_t y = ۰ \Rightarrow ۲D_t x + ۳ \times ۲ = ۰ \Rightarrow D_t x = -۳$

۲۰۹- (۴) وقتی $x = ۲$، y برابر ۱۰ است داریم:

$xD\,y + yD_t x = ۰ \Rightarrow ۲\times۱۰+۱۰D_t x = ۰ \Rightarrow D_t x = -۲$

۲۱۰ -(۳) باید $\frac{۲+۳x}{۳-۲x} > ۰$ یا $-\frac{۲}{۳} < x < \frac{۳}{۲}$ باشد.

۲۱۱ -(۱) در اینجا باید $log\frac{x-x^۲}{۴} \geq ۰$ یا $\frac{x-x^۲}{۴} \geq ۱$ یا $x^۲-x+۴ \leq ۰$ چون عبارت $x^۲-x+۴$ همواره مثبت است مجموعه جواب ϕ است توجه کنید که $\Delta=(-۱)^۲-۴<۰$ و $a>۰$.

۲۱۲ -(۴) تابع $y = lnx$ صعودی است.

۲۱۳ -(۱) دامنه تابع $y= a^x$ برای $a > ۰$ برابر R است.

۲۱۴ -(۴) برد تابع $y=a^x$ برای $a>۰$ و $a\neq۱$ برابر R^+ است.

۲۱۵ -(۴) نمودار $y= expx=e^x$ روی R رسم می‌شود.

۲۱۶ -(۴) توجه کنید که نمودار $y= ln|x|$ نسبت به محور yها تقارن دارد.

۲۱۷ -(۲) تابع $y=۲^{-x}$ نزولی است.

۲۱۸ -(۱) توجه کنید که گزینه ۲ بر $x<۰$ برقرار نیست.

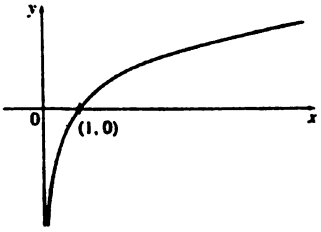
۲۱۹ -(۲) توجه کنید که $y=f(x) = ln(-x)$ در نتیجه $-x=e^y$ یا $x=-e^y$ و ضابطهٔ تابع معکوس f بصورت $y=-e^x$ خواهد بود.

۲۲۰ -(۱) مقادیر تابع در نمودار همواره مثبت می‌باشند و $f(۰)=۱$ در بین گزینه‌ها، تنها گزینه ۱ این شرایط را دارد، نمودار این تابع و ضابطه آن جزء توابع هذلولوی (هیپر بولیک) می‌باشد.

۲۲۱ -(۳) ملاحظه می‌کنید که نمودار از مبداء می‌گذرد در نتیجه فقط گزینه ۳ صحیح است.

روش دوم: توجه کنید که وقتی $x\to\pm\infty$ روی نمودار مقدار تابع به سمت $\pm\infty$ میل خواهد کرد و فقط گزینه ۳ چنین خاصیتی را دارد.

۲۲۲-(۱) نمودار $y=\ln x$ به صورت مقابل می‌باشد و واضح است که برای رسم $y = |\ln x|$ قسمتهایی از نمودار که پایین محور xها هستند به بالای محور تصویر می‌شوند و گزینه ۳ حاصل می‌شود.



۲۲۳-(۳) $\int_{-\ln(a+1)}^{\circ} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big]_{-\ln(a+1)}^{\circ} = -1-(-e^{-(-\ln(a+1))})$

$= -1+e^{\ln(a+1)} = -1+(a+1) = +a$

۲۲۴-(۳) $\ln(\frac{1}{e^x}) = \ln e^{-x} = -x \ln e = -x\times 1 = -x$

۲۲۵-(۱)

$\log_9(x-2)^2 - \log_9(x+2) = 1 \Rightarrow \log_9 \frac{(x-2)^2}{(x+2)} = 1 = \log_9 9$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{(x+2)} = 9 \Rightarrow x^2-13x-14=0 \Rightarrow x=-1$ و 14

جواب $x=-1$ جزء دامنه نیست و $x = 14$ قابل قبول است.

روش دوم: می‌توان مقادیر را در معادله جایگزین نمود و به نتیجه رسید.

روش سوم:

$\log_3(x-2) - \log_9(x+2) = 1 \Rightarrow \log_3(x-2) - \frac{1}{2}\log_3(x+2) = 1 \Rightarrow$

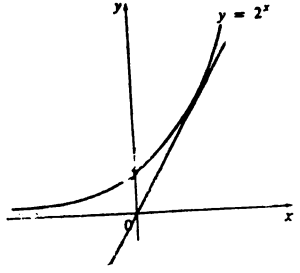
$\log_3 x-2 - \log_3\sqrt{x+2} = 1 \Rightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x+2}} = 3 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{x+2} = 9 \Rightarrow$

$(x-2)^2 = 9x+18 \Rightarrow x^2-13x-14=0 \Rightarrow x=-1$ و 14

۲۲۶-(۴) $\log(1-x^2) \le 0 \Rightarrow \log(1-x^2) \le \log 1 \Rightarrow$

$1-x^2 \le 1 \Rightarrow x^2 \ge 0 \Rightarrow x \in R$

۲۲۷-(۲) نمودار $y=4x$ و $y=3^x$ بصورت مقابل بوده و در یک نقطه بطول ۴ با تماس حاصل می‌کنند. و تنها جواب معادلهٔ $3^x = 4x$ همان $x = 4$ است.



است.

۲۲۸ -(۲) $۵^{x^۲-۵x+۴}<۶۲۵ = ۵^۴ \Rightarrow x^۲-۵x+۴ <۴ \Rightarrow$

$x^۲-۵x <۰ \Rightarrow ۰<x<۵$

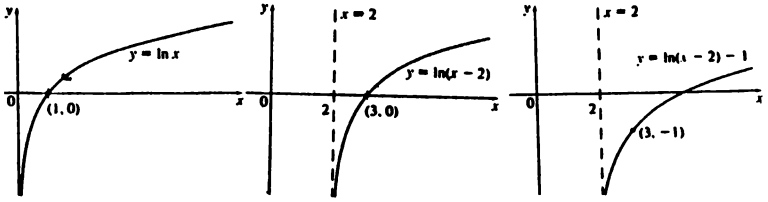
۲۲۹ -(۱) نمودار $y=۳^x+۱$ همان نمودار $y=۳^x$ است که یک واحد به بالا رفته است.

۲۳۰ -(۱) واضح است که برای $x>۰$ تابع ۳^x بالای e^x بوده و e^x بالای ۳^x و برای $x<۰$ برعکس.

۲۳۱ -(۳) توجه کنید که $f'(x) = e^x$ آنگاه $m_۰= e^۰ =۱$ و $m_x = e^x$

۲۳۲ -(۱) توجه کنید که $x = ۲$ مجانب قائم نمودار است و دامنهٔ تابع $(۲,+\infty)$ است.

روش دوم: نمودار $y = lnx$ بصورت شکل چپ است و نمودار $y = ln(-۲)$ x بصورت شکل سمت راست بوده و از انتقال نمودار $y = lnx$ به اندازهٔ ۲ واحد بسمت راست حاصل می‌شود. اکنون نمودار $y = ln(x-۲)$ از انتقال ۱- نمودار $y = ln(x-۲)$ به اندازهٔ ۱ واحد به پایین حاصل می‌شود.



۲۳۳ -(۱) دامنهٔ تابع $[-۲,۲]$ است. و فقط گزینهٔ ۱ چنین است.

روش دوم : خطوط $x = \pm ۲$ مجانب قائم نمودار است و فقط معادلهٔ گزینهٔ ۱ نیز چنین است.

۲۳۴ -(۳) سطح نمودار برابر است با :

$$\int_x^۱ \frac{۱}{t}\,dt = lnt\Big]_x^۱ = ln۱ - lnx = -lnx$$

۲۳۵ -(۱) توجه کنید که $\lim_{x\to ۰} x^x = ۱$

۲۳۶ -(۲) مشابه آزمون ۲۳۴ عمل کنید.

۲۳۷ -(۳) در رابطه $y(t) = y_۰e^{kt}$ با فرض آنکه سال ۱۹۳۰ مبدأ زمان قرار داده شود آنگاه $y_۰ = ۵۰۰۰۰$ و $y(۳۰) = ۷۵۰۰۰$ در نتیجه داریم:

$$y(۳۰) = ۷۵\,۰۰۰ \Rightarrow ۷۵۰۰۰ = ۵۰۰۰۰e^{۳۰k} \Rightarrow \frac{۳}{۲} = e^{۳۰k} \Rightarrow$$

$$۳۰k = ln\frac{۳}{۲} \Rightarrow k = \frac{۱}{۳۰}ln\frac{۳}{۲}$$

اکنون جمعیت در سال ۱۹۹۰ برابر است با:

$$y(۶۰) = ۵۰۰۰۰e^{۶۰(۱/۳۰ln۳/۲)} = ۵۰۰۰۰e^{۲ln۳/۲} = ۵۰۰۰۰e^{ln۹/۴}$$

$$= ۵۰۰۰۰(\frac{۹}{۴}) = ۱۱۲۵۰۰$$

۲۳۸ -(۳) واضح است که بعد از ۱۶۹۰ سال نصف مادهٔ اولیه یا ۵۰% آن باقی می‌ماند.

۲۳۹ -(۱) با توجه به نمودار حد مطلوب برابر e است.

روش دوم : با محاسبهٔ عادی نیز می‌توان به نتیجه رسید.

۲۴۰ -(۱) با توجه به نمودار واضح است.

۲۴۱ -(۲) $t = ۱ \Rightarrow y = ۲y_۰ \Rightarrow ۲y_۰ = y_۰e^{k\times ۱} \Rightarrow ۲ = e^k \Rightarrow k = ln۲$

$$۴y_۰ = y_۰e^{kt} \Rightarrow ۴ = e^{tln۲} = (e^{ln۲})^t = ۲^t \Rightarrow t = ۲$$

۲۴۲ -(۴) $ey_۰ = y_۰e^{۰/۰۸t} \Rightarrow e = e^{۰/۰۸t} \Rightarrow ۰/۰۸t = ۱ \Rightarrow$

$$t = \frac{۱}{۰/۰۸} = ۱۲/۵$$

۲۴۳ -(۴) با جایگزینی $u = ۱ + x^۳$ و $du = ۳x^۲\,dx$ داریم :

$$\int ۳x^۲\sqrt{۱+x^۳}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \frac{۲}{۳}u^{۳/۲} + C = \frac{۲}{۳}(۱+x^۳)^{۳/۲} + C$$

۲۴۴ -(۳) با جایگزینی $u = lnx$ و $du = \frac{dx}{x}$ داریم:

$$\int (lnx)^۳ \frac{dx}{x} = \int u^۳\,du = \frac{۱}{۴}u^۴ + C = \frac{۱}{۴}(lnx)^۴ + C$$

۲۴۵ -(۳) با فرض $u = sinx$ داریم:

$$\int \frac{cosx}{۱+sin^۲x}\,dx = \int \frac{du}{۱+u^۲} = tan^{-۱}u + C = tan^{-۱}(sinx) + C$$

۲۴۶ -(۳) با جایگزینی $u = x-۱$ و $du = dx$ و $x = u+۱$ داریم:

$$\int x\sqrt{\frac{۱}{x-۱}}\,dx = \int (u+۱)\sqrt{\frac{۱}{u}}\,du = \int (\sqrt{u} + \frac{۱}{\sqrt{u}})\,du =$$

$$\frac{۲}{۳}u^{۳/۲} + \frac{۲}{۱}u^{۱/۲} + C = \frac{۲}{۳}(x-۱)\sqrt{x-۱} + ۲\sqrt{x-۱} + C$$

۲۴۷ -(۱) انتگرال خواسته شده برابر مساحت یک ربع دایره به شعاع ۲ است و بنابراین حاصل انتگرال برابر $\frac{۱}{۴}\pi(۲)^۲$ یا π است.

۲۴۸ -(۱) با استفاده از روش جزء به جزء با فرض $u = x$, $dv = cosxdx$ داریم:

$$\int (xcosx)\,dx = xsinx - \int sinx\,dx = xsinx + cosx + C$$

توجه داشته باشد جواب آخر بازای $C = ۰$ همان گزینه ۱ است.

۲۴۹ -(۴) $$\int_۰^۱ ۲e^x\,dx = ۲e^x\Big]_۰^۱ = ۲e - ۲$$

۲۵۰ -(۳) $$\int_۰^a k\,dx = kx\Big]_۰^a = ka$$

۲۵۱ -(۴) $$\int_۰^۳ e^{x/۳}\,dx = ۳e^{x/۳}\Big]_۰^۳ = ۳e^۱ - ۳e^۰ = ۳e - ۳$$

$$\int_{۰}^{۲} f(x)\,dx = \int_{۰}^{۱} f(x)\,dx + \int_{۱}^{۲} f(x)\,dx = \qquad (۲)- ۲۵۲$$

$$\int_{۰}^{۱} x^{۲}\,dx + \int_{۱}^{۲} (۲-x)dx = \frac{۱}{۳}x^{۳}\Big]_{۰}^{۱} + ۲x - \frac{x^{۲}}{۲}\Big]_{۱}^{۲} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۶}$$

۲۵۳ -(۱) با تغییر متغیر $u=\sin x$ تساوی $du=\cos x\,dx$ حاصل می‌شود و داریم :

$$\int ۲^{\sin x}\cos x\,dx = \int ۲^{u}du = \frac{۱}{\ln ۲}۲^{u}+c = \frac{۱}{\ln ۲}۲^{\sin x}+c$$

۲۵۴ -(۲) با توجه به آنکه برای هر تابع f و هر عدد a تساوی $\int_{a}^{a} f(x)dx = ۰$ برقرار است بنابراین عبارت خواسته شده برابر صفر می‌باشد.

$$\int_{۱}^{۲} \frac{۱}{t}\,dt = \ln t\Big]_{۱}^{۲} = \ln ۲ - \ln ۱ = \ln ۲ \qquad (۴)- ۲۵۵$$

$$\int_{e}^{e^{۲}} \frac{۱}{t}\,dt = \ln t\Big]_{e}^{e^{۲}} = \ln e^{۲} - \ln e = ۱ \qquad (۳)- ۲۵۶$$

۲۵۷ -(۱) با تغییر متغیر $u=۱+e^{x}$ تساوی $du = e^{x}dx$ بدست می‌آید در نتیجه :

$$\int_{۰}^{۱} \frac{e^{x}dx}{۱+e^{x}} = \int_{۰}^{۱} \frac{du}{u} = \ln u\Big]_{۰}^{۱} = \ln(۱+e)\Big]_{۰}^{۱}$$

$$= \ln(۱+e) - \ln ۲ = \ln\left(\frac{۱+e}{۲}\right)$$

۲۵۸ -(۴) می‌توان $\log_{۲} x$ را به صورت $\frac{\ln x}{\ln ۲}$ نوشت و با توجه به پاسخ تست ۲۵۲ خواهیم داشت :

$$\int \frac{\log_{۲} x}{\ln ۲}\,dx = \frac{۱}{(\ln ۲)^{۲}}\int \ln x\,dx = \frac{۱}{(\ln ۲)^{۲}}(x\ln x - x + c)$$

روش دوم : می‌توان با استفاده از روش جزء به جزء با فرض $u=\log_{۲} x$ و $dv=dx$ استفاده نمود

$$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + c$$ **۲۵۹- (۲)**

۲۶۰- (۲) با استفاده از تغییر متغیر $u=x^4$ و $du = 4x^3\,dx$ خواهیم داشت:

$$\int_0^{\sqrt[4]{\pi}} x^3 \sin(x^4)dx = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt[4]{\pi}} \sin u\,du = \frac{1}{4}(-\cos u)\Big]_0^{\sqrt[4]{\pi}} =$$

$$-\frac{1}{4}\cos x^4\Big]_0^{\sqrt[4]{\pi}} = -\frac{1}{4}(-1-1) = \frac{1}{2}$$

۲۶۱- (۴) اگر عبارت $8x^3-8x$ را تعیین علامت کنیم دیده می‌شود که این عبارت در فاصله $[-\frac{1}{2}, 0]$ مثبت است و در فاصله $[0, \frac{1}{2}]$ منفی، بنابراین:

$$S=\int_{-1/2}^{0}(8x^3-8x)dx + \int_0^{1/2}-(8x^3-8x)dx = 8\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big]_{-1/2}^{0} + 8\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big]_0^{1/2}$$

$$= -8\left(\frac{1}{64}-\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{64}\right) = \frac{7}{4}$$

۲۶۲- (۱) ابتدا تابع اولیه $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

$$f(x) = \int\left(\frac{\cot x}{\sin^2 x}+\frac{\tan x}{\cos^2 x}\right)dx = \int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx + \int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$$

برای اولی از تغییر متغیر $u=\sin x$ و برای دومی از تغییر متغیر $v=\cos x$ استفاده می‌کنیم خواهیم داشت:

$$f(x) = \int\frac{du}{u^3} + \int\frac{-dv}{v^3} = \frac{1}{-2}u^{-2} - \frac{1}{-2}v^{-2} + c$$

$$= -\frac{1}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2\cos^2 x} + c$$

چون $f(x)$ محور طول ها را در $x=\frac{\pi}{4}$ قطع می‌کند بنابراین $f(\frac{\pi}{4})=0$ است، در نتیجه:

$$\Rightarrow -\frac{1}{2(\sqrt{2}/2)^2} + \frac{1}{2(\sqrt{2}/2)^2} + c = 0$$

بنابراین $f(\frac{3\pi}{4})$ برابر است با

$$f(\frac{۳\pi}{۴}) = -\frac{۱}{۲(\sqrt{۲}/۲)^۲} + \frac{۱}{۲(\sqrt{۲}/۲)^۲} = ۰$$

۲۶۳ -(۳) محل برخورد منحنی با محور xها جوابهای معادله $۳\sin x - \sqrt{۳}\cos x = ۰$ است. معادله را بصورت $\tan x = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ می‌نویسیم و جواب ها $x = k\pi + \frac{\pi}{۶}$ می‌باشد. سطح محصور بین یک طاق برابر خواهد بود با

$$S = \int_{\pi/۶}^{۷\pi/۶} (۳\sin x - \sqrt{۳}\cos x)dx = -۳\cos x - \sqrt{۳}\sin x \Big]_{\pi/۶}^{۷\pi/۶}$$

$$= -۳(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) - \sqrt{۳}(-\frac{۱}{۲}) - (-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}) = ۴\sqrt{۳}$$

۲۶۴ -(۴)
$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \sin\frac{kx}{۲}\,dx = \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{k/۲}\cos\frac{kx}{۲}\Big]_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۰ - (-\frac{۲}{k}) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲}{k} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow k = ۴$$

۲۶۵ -(۳) اگر از طرفین تساوی داده شده مشتق بگیریم، خواهیم داشت :

$kf'(kx+s) = ۴f'(kx+۲)$ از مقایسه ضریب f' و ثابت موجود در طرفین تساوی $k=۴$ و $s=۲$ حاصل می‌شود که واسطه حسابی موجود در این دو برابر خواهد بود با :

$$\frac{k+s}{۲} = \frac{۴+۲}{۲} = ۳$$

روش دوم : با متغیر $u = kx+۲$ خواهیم داشت :

$$f(kx+s) = \int ۴f'(u)\frac{du}{k} = \frac{۴}{k}f(u)+c = \frac{۴}{k}f(kx+۲)+c$$

از مقایسه دو تساوی نتیجه‌ای که در روش قبلی حاصل شد بدست می‌آید.

۲۶۶ -(۴) اگر تساوی را بر حسب y حل کنیم معادله $x^۲ = ۲۰ - ۱۶y - ۴y^۲$ حاصل می‌شود اگر x را برابر صفر قرار دهیم محل برخورد با محور yها حاصل می‌شود که نقاط به عرض ۱ و ۵- می‌باشد (توجه کنید که مجموع ضرایب صفر است). اکنون اگر از فرمول حجم ناحیه دوار حول محور yها استفاده کنیم،

خواهیم داشت :

$$v = \int_{-۵}^{۱} \pi x^۲ \, dy = \int_{-۵}^{۱} \pi \, (۲۰ - ۱۶y - ۴y^۲) dy = \pi (۲۰y - ۸y^۲ - \frac{۴}{۳} y^۳) \Big]_{-۵}^{۱}$$

$$= ۱۴۴\pi$$

$$v = \int_{۰}^{۱} \pi y^۲ \, dx = \pi \int_{۰}^{۱} x^{۲/۳} \, dx = \pi \frac{۳}{۵} x^{۵/۳} \Big]_{۰}^{۱} = \frac{۳\pi}{۵} \quad (۲) - ۲۶۷$$

$$f(x) = \int ۱۱x^{۶/۵} \, dx = ۱۱(\frac{۵}{۱۱} x^{۱۱/۵}) + c = ۵x + c \quad (۱) - ۲۶۸$$

چون $f(۰) = -۵$ بنابراین $c = -۵$ و در نتیجه $f(۱) = ۵ - ۵ = ۰$

$$V = \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \pi (۴\sin x)^۲ \, dx = ۸\pi \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} (۱ - \cos ۲x) \, dx = \quad (۴) - ۲۶۹$$

$$۸\pi \left[x - \frac{۱}{۲} \sin ۲x \right] \Big]_{-\pi/۲}^{\pi/۲} = ۸\pi \left[\frac{\pi}{۲} - ۰ - (-\frac{\pi}{۲} - ۰) \right] = ۸\pi^۲$$

۲۷۰ -(۱) با توجه به تعریف حد مجموع و سپس تغییر متغیر $u = ۱ + x^۲$ داریم :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} \frac{\frac{i}{n}}{\sqrt{۱ + (i^۲/n^۲)}} \right) = \int_{۰}^{۱} \frac{x}{\sqrt{۱ + x^۲}} \, dx = \frac{۱}{۲} \int_{۰}^{۱} \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۱} u^{۱/۲} \Big]_{۰}^{۱} = (۱ + x^۲)^{۱/۲} \Big]_{۰}^{۱} = \sqrt{۲} - ۱$$

۲۷۱ -(۱) با توجه به تساوی زیر حد بصورت $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{۱}{n} (۱ - \frac{۱}{e}) \right) = ۰$ خواهد بود.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{-۱/n} + e^{-۲/n} + \ldots + e^{-n/n}}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} e^{-i/n} =$$

$$= \int_{۰}^{۱} e^{-x} \, dx = -e^{-x} \Big]_{۰}^{۱} = -e^{-۱} - (-e^{۰}) = ۱ - \frac{۱}{e}$$

۲۷۲ -(۲) با استفاده از روش جزء به جزء با فرض $u = \ln x$ و $dv = dx$ خواهیم داشت :

$$\int ln\,x\,dx = x\,lnx - \int x\frac{dx}{x} = x\,lnx - x + c$$

۲۷۳ -(۱) با استفاده از تغییر متغیر $u=lnx$ تساوی $du=\frac{dx}{x}$ حاصل می‌شود، در نتیجه داریم :

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(lnx)^3} = \int_e^{e^2} \frac{du}{u^3} = \frac{u^{-2}}{-2}\Big]_e^{e^2} = -\frac{(lnx)^{-2}}{2}\Big]_e^{e^2} = -[\frac{1}{8} - \frac{1}{2}] = \frac{3}{8}$$

۲۷۴ -(۲) در اینجا از تغییر متغیر $u=x+1$ استفاده می‌کنیم داریم :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{(u-1)^2}{u}\,dx = \int_0^1 (u-2+\frac{1}{u})du = \frac{u^2}{2} - 2u + lnu\Big]_0^1$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2} - 2(x+1) + ln(x+1)\Big]_0^1 = -2 + ln2 - (-\frac{3}{2}) = ln2 - \frac{1}{2}$$

۲۷۵ -(۴) با استفاده از قضیه اساسی اول و نتایج آن با فرض $g(t)=tsint$ و $u=x^2$ خواهیم داشت :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{x^2} tsin\,dt = (2x)\,[x^2\,sinx^2] = 2x^3\,sinx^2$$

۲۷۶ -(۱) چون تابع مثبت است سطح زیر منحنی همان انتگرال تابع روی فاصله ۱ و n می‌باشد.

۲۷۷ -(۴) با استفاده از تغییر متغیر $u=e^x$ خواهیم داشت : $du=e^x\,dx$

$$\int_0^{ln2} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int_0^{ln2} \frac{du}{1+u^2} = tan^{-1}\,u\Big]_0^{ln2} = tan^{-1}\,e^x\Big]_0^{ln2}$$

$$= tan^{-1}\,e^{ln2} - tan^{-1}\,e^0 = tan^{-1}2 - tan^{-1}1 = tan^{-1}2 - \frac{\pi}{4}$$

۲۷۸ -(۳) با استفاده از تغییر متغیر $u=e^x$ خواهیم داشت $du=e^x\,dx$ و در نتیجه داریم

$$\int_{-ln2}^{0} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \int_{-ln2}^{0} \frac{du}{1-u^2} = sin^{-1}\,u\Big]_{-ln2}^{0} = sin^{-1}\,e^x\Big]_{-ln2}^{0}$$

$$= \sin^{-1} e^{-\ln 2} - \sin^{-1} e^{0} = \sin^{-1}\frac{1}{2} - \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3}$$

۲۷۹- (۴) رابطه $y^2 = x^3$ را به صورت $y = x^{3/2}$ می‌نویسیم، خواهیم داشت:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+(\frac{3}{2}x^{1/2})^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\, dx$$

با جانشینی $u = 1+\frac{9}{4}x$ و $du = \frac{9}{4}dx$ خواهیم داشت:

$$= \int_0^4 \sqrt{u}\, \frac{4}{9}\, du = \frac{4}{9}\int_0^4 \sqrt{u}\, du = \frac{4}{9}\, \frac{u^{3/2}}{3/2}$$

$$= \frac{8}{27}(1+\frac{9}{4}x)^{3/2}\Big]_0^4 = \frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

۲۸۰- (۲) با تغییر متغیر $u = x^2$ خواهیم داشت

$$\int xe^{x^2}dx = \int \frac{1}{2}e^u du = \frac{1}{2}e^u + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

۲۸۱- (۴) ابتدا معادله منحنی را بصورت $y = \sqrt{4-x^2}$ می‌نویسیم در اینجا $x \in [\sqrt{2}, 2]$، خواهیم داشت:

$$L = \int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{1+(\frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}})^2}\, dx = \int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\, dx =$$

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\, dx = 2\int_{\sqrt{2}}^2 (4-x^2)^{3/2}\, dx$$

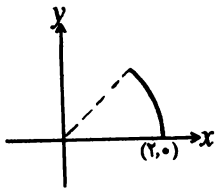
اکنون از جانشینی $x = 2\sin\theta$ و $dx = 2\cos\theta\, d\theta$ استفاده می‌کنیم خواهیم داشت:

$$= 2\int_{\sqrt{2}}^2 (4-4\sin^2\theta)^{-1/2}\, \cos\theta\, d\theta = 2\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{2\cos\theta}\, 2\cos\theta\, d\theta = 2\theta\Big]_{\sqrt{2}}^2$$

$$= 2\sin^{-1}\frac{x}{2}\Big]_{\sqrt{2}}^2 = 2(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$$

روش دوم: می‌توان به صورت ضمنی از معادله $x^2+y^2=4$ مشتق گرفت و مشابه روش قبل عمل کرد.

روش سوم : مطابق شکل مقابل طول قوس خواسته شده $\frac{۱}{۸}$ محیط دایره‌ای به شعاع ۲ است یعنی طول قوس برابر است با :



$$\frac{۱}{۸}(۲\pi \times ۲) = \frac{\pi}{۲}$$

$$l = \int_{۰}^{\frac{۴}{۹}} \sqrt{۱+(\frac{۳}{۲}x^{۱/۲})^{۲}}\, dx = \int_{۰}^{\frac{۴}{۹}} \sqrt{۱+\frac{۹}{۴}x}\, dx \qquad (۳)\text{- ۲۸۲}$$

با استفاده از تغییر متغیر $u = ۱+\frac{۹}{۴}x$ و $du = \frac{۹}{۴}dx$ یا $dx = \frac{۴}{۹}du$ داریم :

$$l = \int_{۰}^{\frac{۴}{۹}} \sqrt{u}(\frac{۴}{۹}du) = \frac{۴}{۹}\ \frac{u^{۳/۲}}{۳/۲}\Big]_{۰}^{\frac{۴}{۹}} = \frac{۸}{۲۷}(۱+\frac{۹}{۴}x)^{۳/۲}\Big]_{۰}^{\frac{۴}{۹}} =$$

$$= \frac{۸}{۲۷}((۲)^{۳/۲} - ۱) = \frac{۸}{۲۷}(۲\sqrt{۲} - ۱)$$

۲۸۳ -(۳) با فرض $f(x) = e^{x^{۲}}$ اگر فاصله صفر و چهار را به دو قسمت $[۰,۲]$ و $[۲,۴]$ تقسیم کنیم آنگاه نقاط وسط ۱ و ۳ خواهند بود و داریم :

$$\int_{۰}^{۴} e^{x^{۲}}\, dx \approx ۲f(۱) + ۲f(۳) = ۲e^{۱} + ۲e^{۹}$$

۲۸۴ -(۱) از فرمول $\int_{a}^{b} f(x)\, dx = f(a) + ۲f(a+\Delta x) + \ldots + f(b)$ داریم:

$$\int_{۰}^{\pi} e^{\sin x}\, dx = \frac{\pi}{۲}e^{۰} + ۲e + e^{۰}$$

$$\int_{۰}^{۴} e^{x^{۲}}\, dx = e^{۰} + ۲e^{۲^{۲}} + e^{۴^{۲}} = ۱ + ۲e^{۴} + e^{۱۶} \qquad (۱)\text{- ۲۸۵}$$

۲۸۶ -(۴) با توجه به اینکه در فاصله $[۱,۴]$ عبارت xe^{x} مابین e و $۴e^{۴}$ واقع است بنابراین :

$$\int_{۱}^{۴} e\, dx \le \int_{۱}^{۴} xe^{x}\, dx \le \int_{۱}^{۴} ۴e^{۴}\, dx \Rightarrow ۳e \le \int_{۱}^{۴} xe^{x}\, dx \le ۱۲e^{۴}$$

بنابراین کران بالای انتگرال برابر $۱۲e^{۴}$ است.

۲۸۷ -(۴) با توجه به پاسخ تست قبل کران پایین $۳e$ خواهد بود.

۲۸۸ -(۲) هرگاه با انتگرالهای معین که شامل قدر مطلق یا جزء صحیح هستند مواجه شدیم باید فاصله انتگرال گیری را طوری تجزیه کنیم که تکلیف جزء صحیح یا قدر مطلق مشخص شود در اینجا داریم:

$$\int_{۱}^{۵}[x]e^{x}\,dx = \int_{۱}^{۲}[x]e^{x}\,dx + \int_{۲}^{۳}[x]e^{x}\,dx + \int_{۳}^{۴}[x]e^{x}\,dx + \int_{۴}^{۵}[x]e^{x}\,dx$$

$$= \int_{۱}^{۲}۱\times e^{x}\,dx + \int_{۲}^{۳}۲\times e^{x}\,dx + \int_{۳}^{۴}۳\times e^{x}\,dx + \int_{۴}^{۵}۴\times e^{x}\,dx$$

$$= (e^{۲}-e) + (۲e^{۳}-۲e^{۲}) + (۳e^{۴}-۳e^{۳}) + (۴e^{۵}-۴e^{۴})$$

$$= ۴e^{۵} - e^{۴} - e^{۳} - e^{۲} - e$$

۲۸۹ -(۳) با توجه به توضیح تست قبل داریم:

$$\int_{-۱}^{۲}|x|\,x^{۲}\,dx = \int_{-۱}^{۰}|x|\,x^{۲}\,dx + \int_{۰}^{۲}|x|\,x^{۲}\,dx = \int_{-۱}^{۰}-x^{۳}\,dx + \int_{۰}^{۲}x^{۳}\,dx$$

$$-\frac{۱}{۴}x^{۴}\Big]_{-۱}^{۰} + \frac{۱}{۴}x^{۴}\Big]_{۰}^{۲} = ۰ - (-\frac{۱}{۴}) + ۴ - ۰ = \frac{۱۷}{۴} = \frac{۲^{۴}+۱}{۴}$$

۲۹۰ -(۳) با توجه به قضیه اساسی اول داریم:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{t}\frac{\cos x}{۱+x^{۳}} = \frac{\cos t}{۱+t^{۳}}$$

۲۹۱ -(۴) اگر فرض کنیم $\frac{۱}{x^{۲}-۴} = \frac{A}{x-۲} + \frac{B}{x+۲}$ آنگاه با مخرج مشترک

گرفتن از طرف راست و متحد قرار دادن صورتها خواهیم داشت :

$$A = -B = \frac{۱}{۴}$$

بنابراین داریم

$$\int \frac{dx}{x^۲-۴} = \frac{۱}{۴}\int \frac{dx}{x-۲} - \frac{۱}{۴}\int \frac{dx}{x+۲} =$$

$$\frac{۱}{۴}\left[ln|x-۲| - ln|x+۲| \right] + c = \frac{۱}{۴} ln \left|\frac{x-۲}{x+۲}\right| + c$$

روش دوم : از فرمول $\int \frac{dx}{x^۲-a^۲} = \frac{۱}{۲a} ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$ نیز می‌توان کمک گرفت .

۲۹۲ -(۱)

$$\int_۱^۲ (x+\frac{۱}{x})^۲ dx = \int_۱^۲ (x^۲+۲+\frac{۱}{x^۲})\, dx = \frac{x^۳}{۳}+۲x-\frac{۱}{x}\Big]_۱^۲$$

$$= \frac{۸}{۳}+۴-\frac{۱}{۲}-(\frac{۱}{۳}+۲-۱) = \frac{۲۹}{۶}$$

۲۹۳ -(۳)

$$\int_a^b e^x\, dx = e^x\Big]_a^b = e^b - e^a$$

۲۹۴ -(۳) از تغییر متغیر $u=sin\, x$ استفاده می‌کنیم، خواهیم داشت :

$$\int \sqrt{sinx}\ cos\, x\, dx = \int \sqrt{u}\, du = \frac{۲}{۳} u^{۳/۲} + c = \frac{۲}{۳} sin^{۳/۲} x + c$$

۲۹۵ -(۳) باید از روش جزء به جزء استفاده کرد با فرض $u=x$ و $dv = cos\, ۳x\, dx$ خواهیم داشت :

$$\int x\, cos\ ۳x\, dx = x \times \frac{۱}{۳}\ sin ۳x\ - \int \frac{۱}{۳} sin ۳x\, dx$$

$$= \frac{۱}{۳} x\, sin ۳x - \frac{۱}{۳}(-\frac{۱}{۳} cos ۳x) + c = \frac{۱}{۳} x\, sin\, ۳x + \frac{۱}{۹} cos ۳x + c$$

۲۹۶ -(۳) با فرض $u = ln\, x$ و $dv = x\, dx$ خواهیم داشت :

$$\int x\, lnx\, dx = \frac{x^۲}{۲} ln\, x - \int \frac{x^۲}{۲} \times \frac{dx}{x} = \frac{۱}{۲} x^۲\, lnx - \frac{۱}{۴} x^۲ + c$$

۲۹۷ -(۲) اگر $u=cos\, x$ و $dv=e^x\, dx$ در این صورت داریم :

$$\int e^x \cos x\, dx = \cos x\, e^x - \int e^x(-\sin x)dx =$$
$$\cos x\, e^x + \int e^x \sin x\, dx$$

اکنون برای دومین بار لازم است از فرمول انتگرال گیری به روش جزء به جزء استفاده کنیم، فرض کنید $w=\sin x$ و $dz=e^x\,dx$ در این صورت داریم :

$$\int \cos x\, e^x\, dx = \cos x\, e^x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx$$

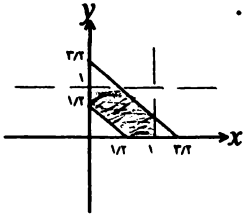
اگر انتگرال سمت راست را به چپ منتقل کنیم خواهیم داشت .

$$۲\int \cos x\, e^x\, dx = e^x(\cos x + \sin x) \Rightarrow$$
$$\int \cos x\, e^x = \frac{۱}{۲} e^x(\cos x + \sin x) + c$$

۲۹۸ -(۳) توجه کنید که طول فاصله $[۰,۴]$ برابر ۴ و طول فاصله $(۰,۱]$ برابر ۱ است و نسبت دومی به اولی $\frac{۱}{۴}$ است .

۲۹۹ -(۳) طول فاصله $[۰,۱]$ نیز برابر ۱ است .

۳۰۰ -(۳) ناحیه مورد نظر در شکل مقابل هاشور خورده است و مساحت آن برابر $\frac{۳}{۴}$ است و چون مربع مساحتش ۱ است

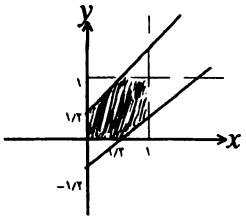


بنابراین داریم :

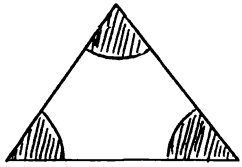
$$p(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{۳/۴}{۱} = \frac{۳}{۴}$$

۳۰۱ -(۱) مساحت چهار ربع دایره برابر $۴\left(\frac{۱}{۴}\pi(\frac{۲}{۱۱})^۲\right) = \frac{۴\pi}{۱۲۱}$ است و مساحت قسمت هاشور خورده برابر $۱۶ - \frac{۴\pi}{۱۲۱}$ است و احتمال آنکه نقطه در ناحیه هاشور خورده باشد برابر $\frac{۱۶ - ۴\pi/۱۲۱}{۱۶}$ یا $۱ - \frac{\pi}{۴۸۴}$ است .

۳۰۲ -(۳) ناحیه خواسته شده به مساحت $\frac{۱}{۴}$ است و مساحت مربع واحد یک است و نسبت این دو برابر $\frac{۱}{۴}$ است .



۳۰۳-(۲) اگر برای x و y مختصات عمود بر هم در نظر بگیرید آنگاه ناحیه اصلی مربع واحد است و ناحیه $|x-y|<\frac{۱}{۲}$ عبارت است از ناحیه بین دو خط $x-y=\frac{۱}{۲}$ و $x-y=-\frac{۱}{۲}$ که مطابق شکل مساحتش $\frac{۳}{۴}$ است.



۳۰۴-(۱) اگر نقطه فاصله‌اش تا رأس ها کمتر از یک باشد در قسمتهایی از دایره هایی به شعاع یک مطابق شکل واقع است و مساحت قسمت هاشور خورده برابر $\frac{۱}{۲}\pi$ است و مساحت مثلث برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲۵ است و نسبت این دو برابر $\frac{\sqrt{۳}\pi}{۷۵}$ است.

۳۰۵-(۲) باید داشته باشیم $|x-y|>۲$ مانند تست ۳۰۳ عمل کنید.

۳۰۶-(۳) باید $p(X=x)>۰$ و نیز $\sum_{x=۱}^{n} p(X=x)=۱$ از شرط دوم داریم:

$$\frac{۱}{۲n+۱}+\frac{۲}{۲n+۱}+\ldots+\frac{۵}{۲n+۱}=۱ \Rightarrow \frac{۱۵}{۲n+۱}=۱ \Rightarrow n=۷$$

۳۰۷-(۱)

$$p\,(\text{دو نفر والیبالیست})=\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}=\frac{۲}{۷}$$

۳۰۸-(۳)

$$p\,(\text{دو نفر هم رشته})=\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}+\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۷}{۲}}=\frac{۲}{۷}+\frac{۱}{۷}=\frac{۳}{۷}$$

۳۰۹-(۲) با توجه به توزیع دو جمله داریم:

$$p\,(x=۳) = \binom{۴}{۳}(\frac{۲}{۳})^{۳}(\frac{۱}{۳})^{۱} = \frac{۳۲}{۸۱}$$

$$E(x) = \sum_{x=۰}^{۴} x\,p(x) = ۰ + ۱\times\binom{۴}{۱}(\frac{۲}{۳})(\frac{۱}{۳})^{۳} + \qquad (۱)\text{-}۳۱۰$$

$$۲\times\binom{۴}{۲}(\frac{۲}{۳})^{۲}(\frac{۱}{۳})^{۲} + ۳\times\binom{۴}{۳}(\frac{۲}{۳})^{۳}(\frac{۱}{۳}) + ۴\times\binom{۴}{۴}(\frac{۲}{۳})^{۴}(\frac{۱}{۳})^{۰}$$

$$= \frac{۸}{۸۱} + \frac{۴۸}{۸۱} + \frac{۹۶}{۸۱} + \frac{۶۴}{۸۱}$$

۳۱۱ -(۱) ابتدا مقادیر احتمال مثبت است و مجموع احتمالها برابر است با

$$\sum_{x=۱}^{n}\frac{۲x-۱}{n^{۲}} = \frac{۱}{n^{۲}}(۲\sum_{x=۱}^{n}x - \sum_{x=۱}^{n}۱) = \frac{۱}{n^{۲}}(۲\frac{n(n+۱)}{۲} - n) = ۱$$

۳۱۲ -(۲) در ۵ حالت (۱,۵) و (۲,۴) و (۳,۳) و (۵,۱) و (۴,۲) مجموع دو تاس برابر ۶ است و دو حالت (۲,۴) و (۴,۲) مطلوب است و احتمال مورد نظر برابر نسبت ایندو یعنی $\frac{۲}{۵}$ است.

روش دوم: می‌توان از فرمول احتمال شرطی نیز استفاده نمود.

۳۱۳ -(۳) اگر احتمال آمدن شیر x باشد احتمال آمدن خط $\frac{x}{۲}$ است و داریم

$$\frac{x}{۲} + x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۲}{۳}$$

۳۱۴ -(۲) مجموع احتمالها برابر ۱ نمی‌باشد.

$$\sum_{x=۱}^{۶} x\,P(x) = ۱\frac{۱}{۴} + ۲\frac{۲}{۷} + ۳\frac{۳}{۱۲} + ۴\frac{۱}{۱۴} + ۵\frac{۱}{۱۴} + ۶\frac{۱}{۱۴} = \frac{۳۷}{۱۴} \qquad (۲)\text{-}۳۱۵$$

$$P(x\geq ۳) = \frac{۳}{۱۲} + \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۱۴} = \frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۱۴} = \frac{۱۳}{۲۸} \qquad (۳)\text{-}۳۱۶$$

۳۱۷ -(۲) باید تک تک عبارات مثبت بوده و مجموع آنها برابر ۱ باشد.

$$p\,(\text{۳ شیر}) = \binom{۵}{۳}(\frac{۲}{۳})^{۳}(\frac{۱}{۳})^{۲} = \frac{۸۰}{۲۴۳} \qquad (۲)\text{-}۳۱۸$$

۳۱۹ -(۳) احتمال مشاهدهٔ دو خط دقیقاً برابر احتمال مشاهدهٔ شیر است.

۳۲۰ -(۲) کوچکترین عضو مجموعه برابر ب.م.م دو عدد ۲۲ و ۲۸ یعنی ۲

۳۲۱ -(۳) گزینهٔ ۳ نقیض یک قضیه است.

۳۲۲ -(۲) تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله برابر $\frac{۱۳\times۱۴}{۲}=\binom{۱۲+۳-۱}{۱۲}$ است در نتیجه تعداد جوابهای صحیح و مثبت معادله برابر $\binom{۱۲+۲-۱}{۱۲}=۱۳=۱۳\times۳+۳+۵۵$ است. زیرا در سه حالت که هر یک ۱۳ = $۱۳\times۷-۱۳\times۳$ دارند یک ریشه برابر صفر است توجه کنید که به سه حالت دو جواب صفر و یک جواب غیر صفر است و این حالت دو بار محاسبه شده است.

۳۲۳ -(۴) مانند آزمون قبل عمل کنید. ؟؟؟

۳۲۴ -(۱) فقط مضارب ۵- می‌توانند ریشهٔ صحیح معادله باشند و از بین مضارب ۵- دو عدد ۱ و ۱- ریشهٔ معادله‌اند.

۳۲۵ -(۴) چون a و b هیچ عامل مشترکی ندارند در نتیجه a^m و b^n نسبت به هم اولند

۳۲۶ -(۱) مجموعهٔ A دارای ۲۰ عنصر است و اعداد ۳ و ۶ و ۹ و ۱۲ و ۱۵ و ۱۸ بر ۳ بخش پذیر و اعداد ۷ و ۱۴ بر ۷ بخش پذیر است و بقیهٔ اعداد که ۱۲=۸-۲۰ تا هستند نه بر ۳ و نه بر ۷ بخش پذیرند.

۳۲۷ -(۲) کوچکترین عضو ۱ و بزرگترین عضو برابر ۹ است. توجه کنید که عدد ۱۰ عضو مجموعه نمی‌باشد.

۳۲۸ -(۱) مانند آزمون ۳۲۲ عمل کنید.

۳۲۹ -(۴) اگر $a=۲$ و $b=۳$ و $c=۵$ آنگاه گزینهٔ ۴ نادرست است.

۳۳۰ -(۱) باید تعداد n هایی را یافت که $۱۰\leq n^۲\leq ۱۰۰$ یا $\sqrt{۱۰}\leq n\leq ۱۰$

اگر n اعداد ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ باشد شرایط فرض برقرار است.

روش دوم: اعدادی صحیحی که بین ۱۰ و ۱۰۰ بوده و مربع کامل هستند عبارتند از ۱۶ و ۲۵ و ... و ۱۰۰ جدر این اعداد اعداد مورد نظر می‌باشند. که تعداد آنها برابر ۷ است.

۳۳۱ -(۲) واضح است.

۳۳۲ -(۳) اگر شهرهای این کشور را با v_1 و v_2 و ... و v_p نشان دهیم می‌توان گرافی از مرتبه p مانند G را به این شهرها متناظر کرد که رئوس این گراف نقاط v_1 و v_2 و ... و v_p و یالهای آن جاده‌های بین شهرها باشد. چون شهرها به هم متصل هستند پس گراف همبند است در نتیجه درخت فراگیر دارد تعداد یال های این درخت فراگیر برابر $q=p-1$ است پس حد اقل $p-1$ جاده در این کشور وجود دارد .

۳۳۳ -(۱) واضح است.

۳۳۴ -(۴) دوری به طول ۵ ، (a,b,d,e,c,a) یا (a,b,d,c,e,a) است.

۳۳۵ -(۱) هر یال تنها دو سر یعنی دقیقاً از دو رأس G می‌گذرد و لذا در طرف چپ فرمول $\Sigma deg v_i = 2q$ هر یال دو بار به حساب می‌آید.

۳۳۶ -(۲) چون گراف G، ۳ منتظم از مرتبه p است پس مجموعه درجه‌های تمام رئوس آن برابر $3p$ می‌باشد و بنابر قضیه مجموع درجه های تمام رئوس برابر $2q$ می‌باشد که q اندازه گراف G است پس $3p=2q$ و از طرفی بنابر فرض مسئله $2p = q+4$ که از حل دستگاه زیر داریم :

$$\begin{cases} 3p=2q \\ q+4=2p \end{cases} \Rightarrow p=8 \text{ و } q=12$$

روش دوم :برای گراف r منتظم همواره داریم $q=\frac{۱}{۲}pr$

۳۳۷ -(۳) جواب آن در جواب سؤال ۳۳۶ داده شده است .

۳۳۸ -(۱) اندازه گراف G (تعداد یالها) $q(G) = ۱۲$ ، ماکزیمم درجه G رأس d دارد که از آن ۵ یال می‌گذرد $\Delta=۵$

۳۳۹ -(۱) دور (a,b,e,d,c,f,g,a) به طول ۶ بوده و از تمامی رئوس می‌گذرد.

۳۴۰ -(۱) ۳ مسیر (a,b) و (a,c,d,b) و (a,c,e,d,b).

۳۴۱ -(۳) به درجهٔ رأسها توجه کنید.

۳۴۲ -(۲) با توجه به شکل دو بخش وجود دارد.

۳۴۳ -(۳) مجموع درجه های رأسهای گراف k_p برابر است با $p(p-۱)$ چون درجه هر رأس $p-۱$ است و دارای p رأس می‌باشد از طرفی می‌دانیم $\Sigma deg(k_p) = ۲q$ بنابراین $q(k_p) = \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow ۲q = p(p-۱)$

۳۴۴ -(۳) چنین گرافی وجود ندارد زیرا در صورت وجود گراف ۳ منتظم با ۱۳ رأس مجموع درجات آن برابر با $۱۳\times۳ = ۳۹$ می‌شود اما می‌دانیم مجموع درجات گراف عددی است زوج پس غیر ممکن است .

۳۴۵ -(۱) ابتدا می‌توان E را مشخص نمود و تمام زوجهایی که در E قرار ندارند در مجموعهٔ موردنظر قرار دارند.

۳۴۶ -(۲) چون در صورت وجود گراف ۵ منتظم با ۱۱ رأس مجموع درجات آن برابر $۱۱\times۵ = ۵۵$ می‌شود اما می‌دانیم مجموع درجات گراف عددی است زوج پس غیر ممکن است .

۳۴۷ -(۲) چون $\Delta(G)\leq p-۱$ و در اینجا $\Delta=۶$ و $p-۱ = ۶-۱=۵$ پس $\Delta\leq p-۱$ که غیر ممکن است .

۳۴۸ -(۱) توجه کنید که گراف جهت‌دار است و چهار راس دارد و هشت یال را نیز شامل می‌شود.

۳۴۹ -(۱) واضح است.

۳۵۰ -(۴) هر یک از گرافهای گزینه‌های ۱ و ۳ گراف ۳ منتظم از مرتبهٔ ۴ می‌باشند.

۳۵۱ -(۴) چون تعداد رأسهای فرد هر گراف زوج است و s فقط یک رأس از درجه فرد دارد یا مجموع درجات رتوس هر گراف عددی است زوج

$۶+۴+۴+۲+۱+۰=۱۷ \neq ۲q$

۳۵۲ -(۲) تعداد رأسهای فرد هر گراف زوج است .

۳۵۳ -(۳) توجه کنید که گراف جهت‌دار است و سه راس دارد و شش یال را نیز شامل می‌شود.

۳۵۴ -(۱) واضح است که گراف ۳ رأس دارد در نتیجه ماتریس مربوطه ۳×۳ می‌باشد و ماتریس گراف همان گزینهٔ گزینهٔ ۱ است.

۳۵۵ -(۱) برای بدست آوردن $M(ROR)$ یا $[M(R)]^{(۲)}$ مانند توان دوم معمولی در ماتریس ها عمل می‌کنیم ولی در نهایت بجای هر درایه غیر صفر که بدست آمده باشد عدد ۱ قرار می‌دهیم و رابطه ترایایی است چون $[M(R)]^{(۲)} \leq M(R)$ می‌باشد .

۳۵۶ -(۳) مانند سؤال ۳۳۶

$$\begin{cases} ۳p = ۲q \\ q+۴ = ۲p \end{cases} \Rightarrow p=۸ \text{ و } q=۱۲$$

روش دوم :برای گراف r منتظم همواره داریم $q=\frac{۱}{۲}pr$

۳۵۷ -(۲) طبق تعریف گراف همبند گزینه ۲ درست است .

۳۵۸ -(۲) $E\cup\overline{E}=\{v_۱v_۲, v_۱v_۳, \dots\}$

۳۵۹ -(۴) همهٔ موارد در گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ درست می‌باشد در نتیجه گزینهٔ ۴ گزینهٔ صحیح است.

۳۶۰ -(۳) واضح است.

۳۶۱ -(۴) توجه کنید که از A به B و از B به G و از C به H هر کدام دو مسیر وجود دارد .

۳۶۲ -(۱) در اینجا ۵ رأس و ۷ یال وجود دارد .

۳۶۳ -(۲) از رأسهای E و B به ترتیب ۳ و ۲ یال می‌گذرد .

۳۶۴ -(۴) $z_۱\times z_۲=(۳-۲i)(۲+۷i)=۶+۲۱i-۴i-۱۴i^۲$

$=۶+۱۷i-۱۴(-۱)=۲۰+۱۷i$

۳۶۵ -(۳) $z_۱+z_۲=۳-۲i+۲+۷i=۵+۵i$

۳۶۶ -(۲) فاصله z از مبدأ $=|z|=\sqrt{۲^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۳}$

۳۶۷ -(۳) $z=۴-۳i \Rightarrow \overline{z}=۴+۳i$

۳۶۸ -(۱) $|\overline{z}|=|۴-۲i|=\sqrt{۴^۲+(-۲)^۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$

۳۶۹ -(۴) $z=\sqrt{۲}\,(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}i)=\sqrt{۲}(cos\frac{\pi}{۴}+isin\frac{\pi}{۴})$

۳۷۰ -(۱) $\overline{z}=۱-i=\sqrt{۲}\,(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}i)=$

$=\sqrt{۲}\,(cos\frac{\pi}{۴}-isin\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۲}\,(cos\frac{۷\pi}{۴}+isin\frac{۷\pi}{۴})$

۳۷۱ - (۲) توجه کنید که $i^۲ = -۱$ ، $i^۳ = -i$ می‌باشد.

۳۷۲ - (۳)
$$\frac{z_۱}{z_۲} = \frac{-۲}{۱+i\sqrt{۳}} = \frac{-۲(۱-i\sqrt{۳})}{۱^۲+(\sqrt{۳})^۲} = -\frac{۱}{۲}(۱-i\sqrt{۳}) =$$
$$= -\frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲} = cos\frac{۲\pi}{۳} + isin\frac{۲\pi}{۳} = e^{i\,۲\pi/۳}$$

۳۷۳ - (۴)
$$(۱+i)^۳ = \left[\sqrt{۲}(cos\frac{\pi}{۴} + isin\frac{\pi}{۴})\right]^۳ =$$
$$= (\sqrt{۲})^۳(cos\frac{۳\pi}{۴} + i\,sin\frac{۳\pi}{۴}) = ۲\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{i\sqrt{۲}}{۲}) =$$
$$= ۲i(۱+i) = -۲+۲i$$

روش دوم: $(۱+i)^۳ = ۱^۳+۳i+۳i^۲+i^۳ = ۱+۳i-۳+(-۱)\,i = -۲+۲i$

۳۷۴ - (۳)
$$(\sqrt{۲}-i)-\big(i(۱-\sqrt{۲}\,i)\big) = \sqrt{۲}-i-i+\sqrt{۲}\,i^۲ = -۲i$$

۳۷۵ - (۴)
$$(۱-i)^۴ = (\sqrt{۲})^۴(cos\frac{۷\pi}{۴} + i\,sin\frac{۷\pi}{۴})^۴ =$$
$$۴(cos۴\frac{۷\pi}{۴} + isin۴\frac{۷\pi}{۴}) = -۴$$

روش دوم:
$$(۱-i)^۴ = (۱-۲i+i^۲)^۲ = (-۲i)^۲ = ۴i^۲ = -۴$$

۳۷۶ - (۳)

$$|z-i| = |z+i| \Rightarrow z-i = \pm(z+i)$$
$$+ \nearrow\ z-i = z+i \Rightarrow i = -i \text{ غ ق ق}$$
$$- \searrow\ z-i = -z-i \Rightarrow z = ۰ \text{ ق ق}$$

$z = ۰$ هم روی محور اعداد حقیقی قرار دارد و هم روی محور موهومی.

$$(۱+i)^n=(۱-i)^n \Rightarrow (\sqrt{۲})^n(cos\frac{\pi}{۴}+isin\frac{\pi}{۴})^n \qquad (۳)-۳۷۷$$

$$=(\sqrt{۲})^n(cos\frac{۷\pi}{۴}+isin\frac{۷\pi}{۴})^n$$

$$\Rightarrow cos\frac{n\pi}{۴}+isin\frac{n\pi}{۴}=cos\frac{۷n\pi}{۴}+isin\frac{۷n\pi}{۴}$$

$$\begin{cases} cos\frac{n\pi}{۴}=cos\frac{۷n\pi}{۴}\Rightarrow\frac{n\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{۷n\pi}{۴} \\ sin\frac{n\pi}{۴}=sin\frac{۷n\pi}{۴}\Rightarrow\frac{n\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{۷n\pi}{۴} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۳n}{۲}=-۲k \Rightarrow n=-\frac{۴k}{۳}$$

چون n عدد طبیعی است پس k مضرب ۳ بوده و n بصورت $-۴k$ یا $۴k$ می‌باشد.

$$z+\frac{۱}{z}=۱ \Rightarrow z^۲-z+۱=۰ \Rightarrow z=\frac{۱\pm\sqrt{۱-۴}}{۲} \qquad (۳)-۳۷۸$$

$$z=\frac{۱}{۲}\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}i=cos\frac{\pi}{۳}+i\,sin\,(\pm\frac{\pi}{۳})$$

۳۷۹ - (۲) هر معادله از درجه n در مجموعهٔ اعداد مختلط n جواب دارد.

۳۸۰ - (۳) با فرض $z=a+ib$ داریم.

$$|z|-z=۱+۲i \Rightarrow \sqrt{a^۲+b^۲}-a-ib=۱+۲i$$

$$\Rightarrow b=-۲,\ \sqrt{a^۲+b^۲}-a=۱ \Rightarrow b=-۲,\ a^۲+۴=(a+۱)^۲ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=-۲, a=\frac{۳}{۲} \Rightarrow z=\frac{۳}{۲}-۲i$$

$$(\frac{\sqrt{۳}-i}{\sqrt{۳}+i})^۴=(\frac{۳-۲\sqrt{۳}i-۱}{۴})^۴= \qquad (۳)-۳۸۱$$

$$=(\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}i)^۴=(\frac{۱}{۴}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}i-\frac{۳}{۴})^۲=(-\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}i)^۲$$

$$=\frac{۱}{۴}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i-\frac{۳}{۴}=-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$$

$$z^۴=۱ \Rightarrow z^۴-۱=۰ \Rightarrow (z^۲-۱)(z^۲+۱)=۰ \Rightarrow \qquad (۱)-۳۸۲$$

$\Rightarrow z = \pm ۱ , z = \pm i$

روش دوم : ریشه‌های چهارم واحد بصورت ± ۱ و $\pm i$ می‌باشند.

۳۸۳ - (۱) $۲+۲\sqrt{۳}\,i = ۴(\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} i) = ۴(cos\frac{\pi}{۳} + isin\frac{\pi}{۳})$

۳۸۴ - (۳) $(\sqrt{۳}\,i + ۱)^{۱۲} = [\,۲(\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} i)]^{۱۲} =$

$= ۲^{۱۲}\,(cos\,۱۲\frac{\pi}{۳} + isin\,۱۲\frac{\pi}{۳}) = ۲^{۱۲}\,(۱ + ۰) = ۲^{۱۲}$

۳۸۵ - (۴) جوابهای معادله $z^{n} = ۱$ همواره روی دایره‌ای به شعاع واحد قرار دارد.

۳۸۶ - (۱) هر صفحه که از مبدأ بگذرد زیر فضای برداری $R^{۳}$ است. توجه کنید که گزینه‌های دیگر شامل مبدأ نیستند.

۳۸۷ - (۳) هر خط گذرنده از مبدأ یک زیر فضای برداری $R^{۳}$ است.

۳۸۸ - (۲) تنها بردار گزینهٔ ۲ مضربی از $\overrightarrow{V}$ نمی‌باشد.

۳۸۹ - (۲) سه بردار که دو به دو عمود بر هم باشند حتماً مستقل خطی است.

۳۹۰ - (۳) هر خط گذرنده از مبداء زیر فضای برداری $R^{۲}$ است.

۳۹۱ - (۱) توجه کنید که $۶w = v - u$ یا $۶w - v + u = ۰$

۳۹۲ - (۳) باید دترمینان ضرایب صفر باشد داریم

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۲ & ۴ \\ ۲ & -۲ & ۲ \\ ۰ & ۳m & ۳ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow -۱۲+۰+۲۴m-(۱۲+۱۲m) = ۰ \Rightarrow m = ۲$$

۳۹۳ - (۳)

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & m & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow m+۰+۴-(۳+۰+۰) = ۰ \Rightarrow m = -۱$$

۳۹۴ - (۴)

$$cos\,(x-\frac{\pi}{۴}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} cosx + \frac{\sqrt{۲}}{۲} sinx = \frac{\sqrt{۲}}{۲} sinx + \frac{\sqrt{۲}}{۲} cosx$$

۳۹۵ - (۲) هر پایه فضای R^{n} دقیقاً n عنصر دارد.

۳۹۶ - (۳) چون نگاشت از R^2 به R^3 است ابعاد مربوط به تبدیل آن ۲×۳ میباشد.

۳۹۷ - (۴) شرط لازم و کافی برای آنکه نگاشت gof تعریف شده باشد آن است که $R_f \subset D_g$ در اینجا باید $R^4 \subset R^k$ باشد در نتیجه $k=4$.

۳۹۸ - (۳) با توجه به آزمون قبلی باید $n=1$ باشد.

۳۹۹ - (۴) تبدیل نظیر fog حاصلضرب تبدیل f و تبدیل g است بنابراین تبدیل نظیر fog برابر $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ یا $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ باشد.

۴۰۰ - (۳) ابعاد تبدیل مربوط به $f: R^m \to R^n$ برابر $n \times m$ است.

۴۰۱ - (۳) چون f نقطه‌ای از R^3 را به نقطه‌ای از R^2 می‌نگارد در نتیجه $f: R^3 \to R^2$ صحیح است.

۴۰۲ - (۳) اولاً $f: R^3 \to R^2$ و چون تعداد سطرهای غیر وابسته $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ یکی است بعد هسته برابر ۱-۳ یا ۲ است.

۴۰۳ - (۲) در اینجا تعداد سطرهای غیر وابسته $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ دو تا است و در نتیجه بعد هسته ۲-۳ یا ۱ است.

۴۰۴ - (۱) $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3i - j + 8k - (k - 2i + 12j) = 5i - 13j + 7k$

روش دوم : هسته مجموعه نقاط (x_1, x_2, x_3) است که $\begin{cases} 0 = 4x_1 + x_2 - x_3 \\ 0 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{cases}$ راستای هسته همان گزینه است. $\frac{x_1}{5} = \frac{x_2}{-13} = \frac{x_3}{7}$

۴۰۵ - (۱) اولاً $f: R^3 \to R^1$ پس تبدیل ۳×۲ بوده و واضح است که تبدیل متناظر بصورت $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ است.

۴۰۶ - (۴)

$$f(x,y,z)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} -x+y-3z=0 \\ -x+2y=0 \end{cases}$$

۴۰۷ - (۱) اگر سطر اول را به سطر سوم اضافه کنیم و سپس دو برابر سطر اول را از سطر دوم کم کنیم و در آخرین مرحله نصف سطر دوم را به سطر سوم بیافزاییم ماتریس تحویل یافته سه سطر غیر صفر دارد و در نتیجه هسته از بعد صفر است.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

روش دوم : چون دترمینان ماتریس ناصفر است در نتیجه سطرها مستقلند و بنابراین بعد هسته صفر است.

۴۰۸ - (۱) اگر هسته نگاشت که صفر بعدی باشد هسته فقط مبداء است.

۴۰۹ - (۲) نگاشت از R^3 به R^2 است در نتیجه نمی‌تواند یک به یک باشد و چون دو سطر مستقلند در نتیجه نگاشت پوشا است.

روش دوم : چون $f(2, \frac{1}{2}, 1)=f(0,0,0)=(0,0)$ نگاشت یک‌به‌یک نمی‌باشد و چون دستگاه $\begin{cases} x+2y-3z=a \\ -x+2z=b \end{cases}$ برای هر زوج (a,b) جواب دارد بنابر این نگاشت پوشاست.

۴۱۰ - (۳) چون هر سه عبارت $x+2y$ و $x+2y$ و $-x-2y$ مضرب یکدیگرند در نتیجه تصویر نگاشت خط $x+2y=0$ است و در نتیجه هسته دارای بعد ۱ یا ۲ است. البته توجه کنید که هسته زیر مجموعه R^2 است.

۴۱۱ - (۲) چون نگاشت از R^2 به R^3 است نمی‌تواند پوشا باشد از آنجا که $x+2y$ و $-x+2y$ مستقلند پس نگاشت یک به یک است.

روش دوم : چون نقطه $(۲,۱,۰)$ جزء تصویر نیست نگاشت پوشا نمی‌باشد.

بعلاوه داریم :

$$f(x_۱,y_۱) = f(x_۲,y_۲) \Rightarrow (x_۱+۲y_۱, x_۱+۲y_۱, -x_۱+۲y_۱) =$$

$$= (x_۲+۲y_۲, x_۲+۲y_۲, -x_۲+۲y_۲) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_۱ + ۲y_۱ = x_۲ + ۲y_۲ \\ -x_۱ + ۲y_۱ = -x_۲ + ۲y_۲ \end{cases} \Rightarrow y_۱ = y_۲ \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

۴۱۲ - (۱) چون نگاشت یک به یک است هسته آن مبداء می‌باشد.

۴۱۳ - (۳) باید $m \le n$ باشد.

۴۱۴ - (۴) نگاشت $f: R^n \to R^m$ در صورتی می‌تواند یک به یک و پوشا باشد که $m = n$.

۴۱۵ - (۱) توجه کنید که هسته نگاشت کلیه (x, y, z) هائی است که $f(x, y, z) = (۰,۰)$ یا $\begin{cases} x+۲y = ۰ \\ -x+۲y = ۰ \end{cases}$ و این دستگاه فقط جواب $(۰,۰)$ را دارد.

در نتیجه مجموعه‌های تراز مجموعه‌های تک عضوی می‌باشند.

۴۱۶ - (۴) در اینجا مشابه آزمون قبل هسته کلیه (x, y, z) هایی است که

$$f(x, y, z) = (۰,۰) \Rightarrow \begin{cases} x+۲y-۳z = ۰ \\ -x+۲z = ۰ \end{cases}$$

بنابراین هستهٔ نگاشت یک خط است و در نتیجه مجموعه‌های تراز نیز خط هستند.

۴۱۷ - (۲) $f(x, y, z) = (۱,-۱) \Rightarrow \begin{cases} x+۲y-۳z = ۱ \\ -x+۲z = -۱ \end{cases} \Rightarrow x = ۴y+۱ = ۲z+۱$

۴۱۸ - (۲) اگر نگاشت $f: R^n \to R^m$ که $n > m$ داده شده باشد هسته f الزاماً یک زیر فضای برداری است. که بعد آن حداقل $n-m$ است .

۴۱۹ - (۲) واضح است که هسته همواره زیر فضای برداری است.

۴۲۰ - (۲) اگر $n>۲$ و $m=۱$ در اینصورت بعد هسته $f:R^n \to R^m$ بزرگتر از ۱ می‌باشد.

۴۲۱ - (۳) با توجه به مفروضات $n=۳$ و $m=۱$ است. اگر نگاشت غیر صفر در نظر گرفته شود هستهٔ آن یک صفحه است و مجموعه‌های تراز صفحه می‌باشند.

۴۲۲ - (۲)

$$\begin{bmatrix} -۲ & ۴ \\ ۴ & -۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -۲x+۴y=a \\ ۴x-۸y=b \end{cases}$$

از دو معادله اخیر $b=-۲a$ بوده و مجموعه (x,y) هائی که $-۲x+۴y=a$ یا $۲y-x=k$ مجموعه تراز می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} -۲ & ۴ \\ ۴ & -۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -۲x+۴y= a \\ ۴x-۸y= b \end{cases}$$

۴۲۳ - (۴)

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۱ & -۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+۲z=۱ \\ -x+y-۳z=۱ \end{cases}$$

۴۲۴ - (۱) هسته و در نتیجه مجموعه‌های تراز یک نقطه هستند زیرا داریم:

$$\begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x-y = ۰ \\ x+۰ = ۰ \\ -۳x+۲y = ۰ \end{cases} \Rightarrow x = y = ۰$$

۴۲۵ - (۴) نقطهٔ $(۱/۵, ۱/۵)$ روی مربع در صورتی توسط تبدیل یافته دایره پوشیده می‌شود که دایره با تجانس $۲\sqrt{۲}$ تبدیل شود.

۴۲۶ - (۲) نگاشت تجانس با ضریب $\frac{۳}{\sqrt{\pi}}$ دایره را به دایره‌ای با مساحت مربع تبدیل می‌کند. توجه کنید که طول ضلع مربع ۳ است.

۴۲۷ - (۳) نگاشتها توابع خاصی از R^n به R^m هستند.

۴۲۸ - (۴)

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۴۲۹ - (۱) ترکیب دو تقارن مرکزی یا محوری نگاشت همانی است.

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix} = ۹-۰=۹$$ **(۳) - ۴۳۰**

۴۳۱ - (۱) باید (x,y) را طوری بیابیم که داشته باشیم.

$$(x-y,\ -x-۴y,\ -x+y)=(۱,۲,-۱)$$

در نتیجه داریم.

$$\begin{cases} x-y=۱ \\ -x-۴y=۴ \\ -x+y=-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ y=-۱ \end{cases} \Rightarrow f^{-۱}(۰,-۱)=(۱,۲,-۱)$$

$$\Rightarrow f(۱,۲,-۱)=(۰,-۱)$$

۴۳۲ - (۳) با توجه به آزمون ۴۲۹ چون $s^۲=I$ پس $s^{۳۵۷}=s$.

(۴) - ۴۳۳

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ m & ۰ & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & n \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & n \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ m & ۰ & mn+۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow m=n=۰$$

روش دوم : می‌توان فقط $a_{۱۳}$ و $a_{۳۱}$ را محاسبه نمود و هر دو را برابر صفر قرارداد و به نتیجه رسید.

۴۳۴ - (۱) اگر قرینه سطر اول را به سطر سوم اضافه کنیم ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۱ & -۳ \\ ۰ & ۰ & -۲ & -۴ \end{bmatrix}$ حاصل می‌شود و دستگاه $\begin{cases} x+z=۳ \\ y-z=-۳ \\ -۲z=-۴ \end{cases}$ و جوابهای ۱ و ۲- و ۲ بترتیب برای x, y, z حاصل می‌شود.

۴۳۵ - (۴) باید دترمینان ضرایب مخالف صفر باشد داریم :

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -m & -۳ \\ -۸ & ۰ & ۵ \end{vmatrix} \neq ۰ \Rightarrow -۵m+۴۸-(۸m+۱۰)\neq ۰ \Rightarrow m \neq \frac{۳۸}{۱۳}$$

۴۳۶ - (۴) توجه کنید که دترمینان ضرایب به ازای $m=۳$ صفر می‌شود.

۴۳۷ - (۴) توجه کنید که دترمینان ضرایب همواره نا صفر است.

۴۳۸ - (۳) چون دترمینان ضرایب صفر است در صورتی که m ناصفر باشد دستگاه جواب ندارد.

۴۳۹ - (۲) باید دترمینان ضرایب صفر باشد بنابراین داریم :

$$\begin{vmatrix} c & a & b \\ b & c & a \\ a & b & c \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow c^۳+a^۳+b^۳ - (bca+abc+cab) = ۰ \Rightarrow$$

$$c^۳+a^۳+b^۳ = ۳abc$$

۴۴۰ - (۱) حاصلضرب مقادیر ویژهٔ یک ماتریس برابر دترمینان آن ماتریس است.

۴۴۱ - (۱) مجموع مقادیر ویژه برابر مجموع عناصر قطر اصلی می‌باشد.

$$\begin{vmatrix} k & ۰ & -\alpha \\ ۰ & k-\beta & ۰ \\ -\gamma & ۰ & k \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow k^۲(k-\beta)-(k-\beta).\alpha\gamma=۰ \qquad (۲) - ۴۴۲$$

$$\Rightarrow k=\beta,\ k=\pm\sqrt{\alpha\gamma}$$

۴۴۳ - (۱) چون ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ متقارن است.باید امتدادهای ویژه‌اش بر هم عمود باشند و فقط امتدادهای گزینه ۱ بر هم عمودند.

روش دوم: می‌توان بصورت معمولی نیز به نتیجه رسید.

۴۴۴ - (۴) به آزمون قبلی و تقارن ماتریس گزینه ۴ توجه کنید.

$$\begin{cases} \text{مجموع}=۲ \\ \text{حاصلضرب}=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+n+۲=۲ \\ ۲mn-۲=-۲ \end{cases} \Rightarrow m=n=۰ \quad (۱) - ۴۴۵$$

۴۴۶ - (۱) اگر مقادیر ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ مختلف العلامه باشند معادلهٔ هذلولی است بنابراین با توجه به آزمون ۴۴۰ باید $ac-b^۲<۰$ باشد.

۴۴۷ - (۴) حجم تبدیل یافته یک شکل به حجم V تحت ماتریس A برابر $|A|V$ می‌باشد در اینجا $V=۱$ است.

۴۴۸ - (۱) توجه کنید که در اینجا چون $f: R^۳ \to R^۲$ تبدیل یافته مکعب واحد در صفحه $R^۲$ قرار دارد و حجم آن صفر است.

۴۴۹ - (۱) $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۴ & ۱۰ \end{bmatrix} \Rightarrow a_{۱۱}= ۲,\ a_{۲۲} = ۱۰,\ a_{۱۲}= a_{۲۱} = ۴$

$$\Rightarrow tan۲\theta = \frac{۲a_{۱۲}}{a_{۱۱}-a_{۲۲}} = \frac{۲\times۴}{۲-۱۰} = -۱ \Rightarrow ۲\theta = -\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{۸}$$

۴۵۰ - (۳) $A = \begin{bmatrix} a & h \\ h & a \end{bmatrix} \Rightarrow tan۲\theta = \frac{۲h}{a-a}$ بی‌معنی

$$\Rightarrow ۲\theta = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۴} = ۴۵^\circ$$

۴۵۱ - (۲) اگر یک بیضی به مرکز مبداء به اندازه ۹۰° دوران کند تنها مخرجهای دو جمله $x^۲, y^۲$ جابجا می‌شوند.

۴۵۲ -(۳) چون نمودار محور xها را در $x=-۱$ قطع می‌کند، بنابراین :

$$f(-۱) = ۰ \Rightarrow ۰ = \frac{a(-۱)+b}{-۱+a} \Rightarrow b = a$$

از طرفی چون $x=-۲$ مجانب قائم منحنی است، بنابراین ۲- ریشه مخرج می‌باشد در نتیجه :

$$-۲+a = ۰ \Rightarrow a = ۲$$

چون a و b هر دو برابر ۲ می‌باشند واسطه هندسی آن دو نیز ۲ است .

۴۵۳ -(۲) چون نمودار و خط روی محورها همدیگر را قطع می‌کنند، بنابراین $f(x)$ از نقاط $(۰,۲)$ و $(-۱,۰)$ می‌گذرد، توجه کنید که خط داده شده محورها را در این نقاط قطع می‌کند بنابراین خواهیم داشت :

$$f(۰) = ۲ \Rightarrow \frac{۱}{b} = ۲ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

$$f(-۱) = ۰ \Rightarrow \frac{-a+۱}{-a+b} = ۰ \Rightarrow a = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{b} - \frac{۱}{a} = ۱$$

۴۵۴ -(۱) مشابه تست ۱۶۴ عمل کنید .

۴۵۵ -(۴) (نکته) تابع با ضابطه $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ هنگامی به تابع ثابت تبدیل می‌شود که $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ باشد، در این صورت سؤال خواهیم داشت :

$$\frac{۲}{m} = \frac{m}{۸} \quad \Rightarrow \quad m^۲ = ۱۶ \quad \Rightarrow \quad m = \pm ۴$$

۴۵۶ -(۱) مرکز تقارن تابع محل برخورد مجانب قائم و مجانب افقی است، بنابراین نقطه $(cos^۲t, sin^۲t)$ مرکز تقارن تابع است و این نقاط روی دایره‌ای به شعاع واحد حرکت می‌کنند و معادله آن $x^۲+y^۲ = ۱$ می‌باشد .

۴۵۷ -(۲) نمودار تابع دارای مجانب قائم $x=۳$ است و فقط گزینهٔ ۲ چنین است.

پاسخ تشریحی آزمونهای سراسری و پیشدانشگاهی

۴۵۸ -(۱) کلیهٔ عناصر دنباله از ۱ و ۰ و ۱- تشکیل شده‌اند و بنابراین دنباله کراندار است. بعلاوه هنگامی که n بزرگ شود این مقادیر تکرار می‌شوند در نتیجه مقادیر دنباله به عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند. بنابراین دنباله واگراست.

روش دوم: عناصر دنباله به‌ترتیب بصورت ۰ و ۱ و ۰ و ۱- و ۰ و ۱ و ۰ و ۱- و ... می‌باشد که بوضوح کراندار و واگراست.

۴۵۹ -(۴) اگر عبارت را بصورت کسری نوشته و صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب کنیم داریم

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+1}-n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$$

روش دوم: وقتی n بزرگ باشد می‌توان بجای $\sqrt{n^2+1}$ عبارت n را قرار داد.

۴۶۰ -(۳) ابتدا معکوس تابع g و سپس $fog^{-1}(x)$ را مشخص می‌کنیم داریم

$$y=g(x)=x-1 \Rightarrow x=y+1 \Rightarrow y=g^{-1}(x)=x+1$$

$$fog^{-1}(x)=f(g^{-1}(x))=f(x+1)=2(x+1)+1=2x+3$$

۴۶۱ -(۲) از آنجا که $x\to-1^+$ ، مقدار x بیشتر از ۱- بوده و البته کمتر از صفر می‌باشد در نتیجه $[x]=-1$ ، بنابر این داریم

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{[x]+1}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{-1+1}{x^2-1}=0$$

توجه کنید که وقتی $x\to-1^+$ عبارت x^2-1 منفی بوده و به سمت صفر می‌رود

و چون صورت کسر برابر ۰ است حاصل حد برابر ۰ می‌باشد.

۴۶۲ -(۱) توجه کنید که دامنهٔ تابع همان گزینهٔ ۱ است و تابع روی دامنهٔ داده شده پیوسته است.

۴۶۳ -(۱) ابتدا شیب نیم مماس چپ و نیم مماس راست تابع یعنی m_1 و m_2 را محاسبه می‌کنیم داریم

$$m_1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{|x|-1}{|x|+1} - (-1)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\,\frac{2|x|}{|x|+1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\,\frac{2x}{x+1} = 2$$

$$m_2 = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{|x|-1}{|x|+1} - (-1)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\,\frac{2|x|}{|x|+1} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\,\frac{-2x}{-x+1} = -2$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right| = \left|\frac{2-(-2)}{1+2(-2)}\right| = \frac{4}{3}$$

روش دوم: می‌توان تابع را بصورت دو ضابطه‌ای نوشت و از هر ضابطه جداگانه مشتق گرفت و مشتق چپ و راست تابع در صفر را به‌ترتیب بعنوان حد چپ و راست مشتق تابع در صفر بدست آورد و مشابه حالت قبلی عمل کرد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & x \geq 0 \\ \frac{-x-1}{-x+1} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)^2} & x > 0 \\ \frac{-2}{(-x+1)^2} & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2}{(x+1)^2} = 2 \\ m_2 = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-2}{(x+1)^2} = -2 \end{cases}$$

۴۶۴ -(۲) توجه کنید که $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ همان $f'(2)$ است و داریم

$$\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'\Big|_{x=1/2} = \left(\frac{1}{x}\right)' f'\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_{x=1/2} = \left(-\frac{1}{x^2}\right) f'(2)\Big|_{x=1/2}$$
$$= -4\left(\frac{3}{2}\right) = -6$$

۴۶۵ -(۴) مشتق تابع در صفر، یعنی $f'(۰)$ را محاسبه می‌کنیم توجه کنید که وقتی $x>۰$، $|x|=x$ و وقتی $x<۰$، $|x|=-x$ داریم

$$\lim_{x\to ۰} f'(۰)= \lim_{x\to ۰}\frac{x^۲\,|x|-۰}{x-۰} = \lim_{x\to ۰} x|x| = ۰$$

بنابراین مشتق تابع در صفر موجود است. بطور مشابه برای هر عدد حقیقی x نیز می‌توان دید که مشتق تابع بصورت $f'(x)=x|x|$ است و برای یافتن مشتق دوم نیز بصورت زیر می‌توان عمل کرد.

$$\lim_{x\to ۰} f''(۰)= \lim_{x\to ۰}\frac{x\,|x|-۰}{x-۰} = \lim_{x\to ۰} |x| = ۰$$

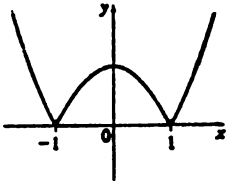
روش دوم: می‌توان مشابه آزمون ۴۶۳ تابع را بصورت دو ضابطه‌ای نوشت و از هر ضابطه دو بار مشتق گرفت و به نتیجهٔ مشابه رسید.

۴۶۶ -(۴) از آنجا که $(۱,۴)$ روی f است $(۴,۱)$ روی $f^{-۱}$ است و داریم

$$(f^{-۱})'(۴) = \frac{۱}{f(۱)'} = \frac{۱}{۳(۱)^۲+۳} = \frac{۱}{۶}$$

۴۶۷ -(۳) تابع f در نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ مشتق ندارد و چون پیوسته است مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق خود را روی هر فاصلهٔ بستهٔ کرانداری اختیار می‌کند.

روش دوم: با توجه به نمودار تابع که بصورت مقابل است تابع در نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ مشتق ندارد و مقدار مینیمم مطلق آن نیز برابر صفر است.



۴۶۸ -(۱) مؤلفهٔ x در $x=۱$ برابر $x_t'=۰/۱$ است و $y=۱$، داریم

$$۲y^۲-x^۲=۱ \Rightarrow ۲y.y_t'-x.x_t'=۰ \Rightarrow y_t'=\frac{x.x_t'}{۲y} = \frac{۰/۱}{۲} = ۰/۰۵$$

۴۶۹- (۲) $\sec^2 2x\,(\cos 5x + \cos 3x + 2\cos x) =$

$$\sec^2 2x(2\cos 4x\cos x + 2\cos x) = \frac{2\cos x}{\cos^2 2x}(\cos 4x + 1) =$$

$$\frac{2\cos x}{\cos^2 2x}(2\cos^2 2x) = 4\cos x$$

روش دوم: اگر دو مقدار $\pi/3$ و $\pi/6$ را بجای x قرار دهیم تنها عبارت گزینهٔ ۲ با عبارت داده شده برابر است.

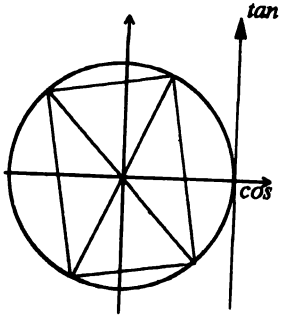
۴۷۰- (۲) طرفین معادله را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم معادلهٔ زیر حاصل می‌شود

$$(1+\sqrt{3})\tan^2 x + (1-\sqrt{3})\tan x = \sqrt{3}(1+\tan^2 x) \Rightarrow$$

$$\tan^2 x + (1-\sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\tan x = \frac{-(1-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3}}}{2} = \sqrt{3} \text{ یا } -1$$

از حل دو معادلهٔ $\tan x = -1$ و $\tan x = \sqrt{3}$ بترتیب جوابهای $x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$ و $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$ حاصل می‌شود که $x = \frac{3\pi}{4}$، $x = \frac{7\pi}{4}$ و $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{4\pi}{3}$ در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ حاصل می‌شود. مطابق شکل مقابل ملاحظه می‌شود که نقاط مورد نظر روی یک مستطیل قرار دارند.



۴۷۱- (۳) $\lim_{x\to 0} \sin 4x(\cot 2x - \cot x) = \lim_{x\to 0} \sin 4x\left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) =$

$$\lim_{x\to 0}\left(2\sin 2x\cos 2x\right)\left(\frac{\cos 2x\sin x - \sin 2x\cos x}{\sin 2x\sin x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(2\cos 2x\right)\left(\frac{\sin(-x)}{\sin x}\right) = -2$$

روش دوم: با استفاده از هم ارزی $sinu$ و u وقتی $u\to 0$ داریم

$$\lim_{x\to 0} \sin 4x(\cot 2x-\cot x) = \lim_{x\to 0} 4x\left(\frac{\cos 2x}{2x}-\frac{\cos x}{x}\right)=$$

$$4\left(\frac{1}{2}-1\right) = -2$$

۴۷۲ -(۴) با توجه به گزینه‌ها مجانب افقی مورد نظر است توجه کنید که وقتی $x\to 0$ عبارت $\sqrt{x^2-2x}$ با $-x$ هم ارز است داریم

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{4-2x}{\sqrt{x^2-2x}}\right) = 0+\lim_{x\to -\infty}\frac{4-2x}{1-x} = 2$$

روش دوم: $$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{4-2x}{\sqrt{x^2-2x}}\right) = \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to -\infty}\frac{x(4/x-2)}{|x|\sqrt{1-2/x}}$$

$$0+\lim_{x\to -\infty}\frac{x(4/x-2)}{-x\sqrt{1-2/x}} = 2$$

۴۷۳ -(۳) ضریب زاویه خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه (x,y) برابر $f'(x)=6x\sqrt{2x^2-1}$ است بنابراین تابع f با انتگرالگیری از f' بدست می‌آید

داریم با تغییر متغیر $u=2x^2-1$ ، و تساوی $du=4xdx$ داریم

$$\int 6x\sqrt{2x^2-1} = \int 3/2\sqrt{u}\,du = \frac{3/2}{3/2}u^{3/2}+c = (2x^2-1)\sqrt{2x^2-1}+c$$

چون نمودار از نقطهٔ $(1,1)$ می‌گذرد $c=0$ خواهد بود.

۴۷۴ -(۲) ابتدا $F(x)$ را محاسبه و از قضیهٔ اساسی انتگرال استفاده می‌کنیم

$$F(\pi)-F\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\frac{\sin x}{\frac{1}{|\cos x|}}dx$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}-\sin x\cos x\,dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}-\frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} =$$

$$\frac{1}{4}\cos 2x\Big]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} = \frac{1}{4}(1-0) = \frac{1}{4}$$

روش دوم: با تغییر متغیر $u=cosx$ ، و تساوی $du=-sinxdx$ داریم

$$F(\pi)-F(\frac{۳\pi}{۴})=\int_{\frac{۳\pi}{۴}}^{\pi}\frac{sinx}{\sqrt{۱+tan^۲x}}dx=\int_{\frac{۳\pi}{۴}}^{\pi}\frac{sinx}{\frac{۱}{|cosx|}}dx=$$

$$\int_{\frac{۳\pi}{۴}}^{\pi}-sinxcosxdx=\int_{\frac{۳\pi}{۴}}^{\pi}udu=\frac{۱}{۲}u^۲\Big]_{\frac{۳\pi}{۴}}^{\pi}=$$

$$\frac{۱}{۲}cos^۲x\Big]_{\frac{۳\pi}{۴}}^{\pi}=-\frac{۱}{۲}\left((\frac{-\sqrt{۲}}{۲})^۲-(-۱)^۲\right)=\frac{۱}{۴}$$

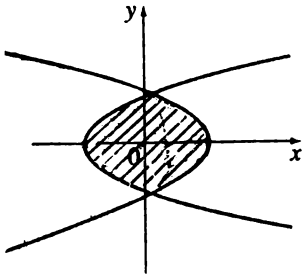
۴۷۵-(۱) از تغییر متغیر $u=lnx$ ، و $du=\frac{۱}{x}dx$ خواهیم داشت

$$\int_{۱}^{e^۲}\frac{lnx}{x}dx=\int_{۱}^{e^۲}udu=\frac{۱}{۲}u^۲\Big]_{۱}^{e^۲}=\frac{۱}{۲}(lnx)^۲\Big]_{۱}^{e^۲}=\frac{۱}{۲}(۲^۲-۰^۲)=۲$$

۴۷۶-(۳) ابتدا محل تقاطع دو منحنی $x=y^۲-۱$ و $x=-y^۲+۱$ را می‌یابیم

$$x=-y^۲+۱=y^۲-۱ \Rightarrow ۲y^۲=۲ \Rightarrow$$

$$y=\pm ۱ \text{ و } x=۰$$



با توجه به شکل مقابل سطح مورد نظر برابر است با

$$S=\int_{-۱}^{۱}-y^۲+۱-(y^۲-۱)\,dy=\int_{-۱}^{۱}(۲-۲y^۲)dy$$

$$=۲y-\frac{۲}{۳}y^۳\Big]_{-۱}^{۱}=(۲-\frac{۲}{۳})-(-۲+\frac{۲}{۳})=\frac{۸}{۳}$$

۴۷۷-(۱) بردارهای $\pm(\vec{a}\times\vec{b})$ همواره بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود هستند.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۱&۱&۰\\ ۱&۰&-۱\end{vmatrix}=(-۱-۰)\vec{i}+(۱+۰)\vec{j}+(۰-۱)\vec{k}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$$

بردار $-(\vec{a}\times\vec{b})$ همان گزینهٔ ۱ است

۴۷۸ -(۴) بردار خواسته شده $\vec{k}-(-\vec{k})$ یا $2\vec{k}$ است.

۴۷۹ -(۳) باید دترمینان ماتریسی با سطرهای سه بردار صفر باشند داریم

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & m & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-2+0-3m)-(6+0+1)=0 \Rightarrow m=-3$$

۴۸۰ -(۲) با تقسیم معادلهٔ صفحهٔ دوم بر ۲ با توجه به فرمول فاصلهٔ دو صفحه داریم

$$\text{فاصله} = \frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1-3/2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

روش دوم: می‌توان معادلهٔ اول را در ۲ ضرب نمود و به نتیجهٔ مشابه رسید.

روش سوم: فاصلهٔ نقطهٔ $(1,0,0)$ روی صفحهٔ اول از صفحهٔ دوم برابر فاصلهٔ دو صفحه است

$$\text{فاصله} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2\times1+2\times0+2\times0-3|}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

روش چهارم: می‌توان فاصلهٔ یک نقطه روی صفحهٔ دوم را از صفحهٔ اول یافت.

۴۸۱ -(۳) بردار پارامترهای هادی خط یعنی $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3})$ و بردار نرمال صفحه که بصورت $(3, -2, 2)$ است بر یکدیگر عمود هستند پس خط و صفحه موازیند. از طرفی چون نقطهٔ $(0, 1, 0)$ روی خط است و روی صفحه نیست بنابراین خط بر صفحه منطبق نمی‌باشد.

روش دوم: می‌توان سه معادلهٔ $2x=y-1=3z$ و $2x-2y+3z=2$ را همزمان حل کرد و چون دستگاه جواب ندارد خط و صفحه موازیند.

۴۸۲ -(۳) نگاشت $f(x,y)=(x-y,0)$ نه یک‌به‌یک است و نه پوشا چون اولاً $f(2,2)=f(1,1)$ ثانیاً هیچ نقطه‌ای به نقطهٔ $(0,1)$ نگاشته نمی‌شود.

روش دوم: ماتریس متناظر با نگاشت f بصورت $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ می‌باشد و چون دترمینان این ماتریس صفر است پس نگاشت f نه یک‌به‌یک است و نه پوشا.

نکته: توجه کنید که اگر دترمینان ماتریس متناظر با نگاشت $f:R^n \to R^n$ صفر باشد آنگاه نگاشت f نه یک‌به‌یک است و نه پوشا.

۴۸۳ -(۴) برای دو نگاشت $f:R^n \to R^m$ و $g:R^p \to R^q$ هنگامی نگاشت gof موجود است که $m=p$ باشد.

۴۸۴ -(۳) هر گاه $x=y$ باشد آنگاه $f(x,y)=(x-y,y-x,۰)=(۰,۰,۰)$ بنابر این کلیهٔ نقاط $\{(x,y) \mid x-y=۰\}$ هسته f را تشکیل می‌دهند.

روش دوم: هستهٔ $f = \{(x,y) \mid f(x,y)=(۰,۰,۰)\} =$

$$\{(x,y) \mid (x-y,y-x,۰)=(۰,۰,۰)\} = \{(x,y) \mid y-x=۰\}$$

روش سوم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x-y \\ y-x \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow y-x=۰ \Rightarrow y=x$$

۴۸۵ -(۲) کوچکترین عضو مثبت مجموعه $\{mp+nb : m,n \in Z\}$ همان ب‌م‌م b و p است. با توجه به تساوی $۳۷p-۲۹a=۱$ باید داشته باشیم $(p,a)=۱$، از طرفی $p \mid ab$ بنابراین $p \mid b$ در نتیجه p یک شمارندهٔ $mp+nb$ است. بعلاوه اگر q یک شمارندهٔ دیگر p و b باشد آنگاه چون p اول است بنابراین q برابر p است. در نتیجه ب‌م‌م b و p همان p است.

۴۸۶ -(۱) اگر a و b دو عدد مورد نظر باشند و $(a,b)=d$ آنگاه اعداد a' و b' وجود دارند بطوری که $a=a'd$ و $b=b'd$ و $(a',b')=۱$، داریم

$$\frac{a}{b} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \frac{a'd}{b'd} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow a'=۴ \text{ و } b'=۹$$

از طرفی $[a,b]=a'b'd$ ، در نتیجه $۶۱۲=۳۶d$ یا $d=۱۷$.

۴۸۷ -(۱)
$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۴ \end{bmatrix}$$

روش دوم: می‌توان فقط طول نقطهٔ تبدیل یافته را محاسبه نمود.

۴۸۸ -(۴) از ضرب ستون سوم در ۲ و اضافه نمودن ستون دوم به ستون اول و سپس ضرب ستون دوم در $\frac{۱}{b}$ دترمینان دوم حاصل می‌شود در نتیجه دترمینان دوم برابر $\frac{۲}{b}A$ است. توجه کنید که عمل دوم تأثیری ندارد.

روش دوم: با محاسبهٔ دترمینان اول تساوی $A=b^۲a+a^۲b-a^۲b+b^۲$ حاصل می‌شود و دترمینان دوم برابر $۲ba+۲a^۲-۲a^۲+۲b$ یا $\frac{۲}{b}A$ خواهد بود.

۴۸۹ -(۲)
$$A_{۲۳}=(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix} = -۱(۱-۴) = ۳$$

۴۹۰ -(۴) ابتدا سطر دوم را در $-\frac{۱}{۳}$ ضرب نموده و ۵ برابر سطر دوم را به سطر سوم می‌افزاییم

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۹ \\ ۰ & -۳ & -۶ & -۱۲ \\ ۰ & -۵ & -۱۱ & -۲۳ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۹ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۴ \\ ۰ & -۵ & -۱۱ & -۲۳ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۹ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

ماتریس اخیر دستگاه $\begin{cases} x+۲y+۳z=۹ \\ y+۲z=۴ \\ -z=-۳ \end{cases}$ و جواب $\begin{cases} x=۴ \\ y=-۲ \\ z=۳ \end{cases}$ را بدست می‌دهد

بنابراین $x+y+z=۵$ نتیجه می‌شود.

۴۹۱ -(۲) گراف مورد نظر باید دارای ۵ رأس باشد در نتیجه این گراف نمی‌تواند دارای رأسی از درجهٔ ۵ باشد بنابراین گزینه‌های ۱ و ۴ رد می‌شوند

از طرفی تعداد رأسهای فرد یک گراف عددی زوج است و به این صورت گزینهٔ ۳ نیز رد می‌شود.

۴۹۲ -(۴) ملاحظه می‌کنید که بین هر دو رأس گزینهٔ ۴ یک مسیر موجود است.

۴۹۳ -(۲) تعداد جوابهای معادله برابر است با

$$\binom{۱۰}{۲} - \binom{۵}{۲} - \binom{۵}{۲} - \binom{۵}{۲} = ۴۵ - ۳\times ۱۰ = ۱۵$$

۴۹۴ -(۴) باید $a_۲$ تا $a_۸$ را محاسبه نموده و رابطه‌ای کلی محاسبه نماییم داریم

$$a_۲ = a_۱ - \frac{۱}{۴}a_۰ = \frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۴} = \frac{۲(۲)+۱}{۲^۲}$$

$$a_۳ = a_۲ - \frac{۱}{۴}a_۱ = \frac{۵}{۴} - \frac{۳}{۸} = \frac{۷}{۸} = \frac{۲(۳)+۱}{۲^۳}$$

$$a_۴ = a_۳ - \frac{۱}{۴}a_۲ = \frac{۷}{۸} - \frac{۵}{۱۶} = \frac{۹}{۱۶} = \frac{۲(۴)+۱}{۲^۴}$$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم رابطهٔ کلی

$$a_n = a_{n-۱} - \frac{۱}{۴}a_{n-۲} = \frac{۲(n)+۱}{۲^n}$$

حاصل می‌شود و در نتیجه $a_۸ = \frac{۲(۸)+۱}{۲^۸}$

۴۹۵ -(۱) مهرهٔ اول ممکن است سفید یا سیاه باشد داریم

P(احتمال سفید بودن دومی) = P(مهرهٔ دوم سفید)

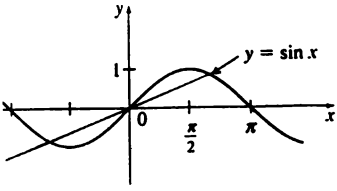
P(مهرهٔ دوم سفید و مهرهٔ اول سیاه) + P(مهرهٔ دوم سفید و مهرهٔ اول سفید) =

$$\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۶} + \frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۶} = \frac{۸}{۱۸} = \frac{۴}{۹}$$

۴۹۶ -(۳) میانگین مورد نظر برابر $\frac{۱}{۰/۲}$ یا ۵ است.

۴۹۷ -(۱) امید ریاضی عدد a برابر a است و چون امید ریاضی خطی است یعنی $E(x-a) = E(x)-a$، و در نتیجه $E(x-E(x)) = E(x)-E(x) = ۰$.

۴۹۸ -(۳) برای یافتن ریشه‌های معادله $y=\sin x$ باید از طریق رسم نمودار اقدام نمود همانطوری که دیده می‌شود دو نمودار $\pi y=۲x$, $y=\sin x$ در سه نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.



روش دوم: می‌توان تعداد ریشه‌های معادلهٔ $y=\frac{۲}{\pi}x - \sin x = ۰$ را از طریق یافتن جهت تغییرات و استفاده از قضیهٔ بولتسانو محاسبه نمود.

۴۹۹ -(۱) واضح است که صورت کسر $f(x)=\frac{|x|-۱}{|x|+۱}$ همواره از مخرج آن کمتر است در نتیجه ۱ جزء برد نمی‌باشد و فقط گزینهٔ ۱ شامل ۱ نمی‌باشد.

روش دوم: می‌توان با توجه به نمودار تابع برد را مشخص کرد اگر نقاط روی نمودار را روی محور y ها تصویر کنیم برد تابع که مجموعهٔ $(-۱,۱]$ است حاصل می‌شود.

روش سوم: اگر در رابطهٔ $y=\frac{|x|-۱}{|x|+۱}$ ، x را بر حسب y بدست بیاوریم رابطهٔ $|x|=\frac{y+۱}{۱-y}$ حاصل می‌شود و این تساوی زمانی برقرار است که $\frac{y+۱}{۱-y}$ مثبت باشد و برای y های در فاصلهٔ $(-۱,۱]$ عبارت مثبت است.

۵۰۰ -(۲)

$$p' = \frac{\alpha^۲}{\beta}.\frac{\beta^۲}{\alpha} = \alpha\beta = \frac{-۱}{۲}$$

$$s' = \frac{\alpha^۲}{\beta}+\frac{\beta^۲}{\alpha} = \frac{\alpha^۳+\beta^۳}{\alpha\beta} = \frac{s^۳+۳sp}{p} = \frac{(۳/۲)^۳+۳(۳/۲)(-۱/۲)}{(-۱/۲)} = \frac{-۴۵}{۴}$$

$$\Rightarrow x^۲-s'x+p' = ۰ \Rightarrow x^۲-\frac{-۴۵}{۴}x+\frac{-۱}{۲} = ۰ \Rightarrow ۴x^۲+۴۵x-۲ = ۰$$

۵۰۱-(۲) $(fof)(\frac{۲}{۳}) = f(f(\frac{۲}{۳})) = f(\cot\frac{\pi}{۴}(\frac{۲}{۳})) = f(\sqrt{۳}) = ۲$

۵۰۲-(۱) نقاط برخورد توابع f و $f^{-۱}$ همواره نسبت به خط $y=x$ تقارن دارند زیرا خود نمودارهای f و $f^{-۱}$ نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند.

۵۰۳-(۴) $y = fog(x) = f(g(x)) = \frac{۱+\sin x}{۱-\sin x} \Rightarrow y-y\sin x = ۱+\sin x$

$$\sin x = \frac{y-۱}{y+۱} \Rightarrow x = Arc\sin\frac{y-۱}{y+۱} \Rightarrow (fog)^{-۱}(x) = Arc\sin\frac{x-۱}{x+۱}$$

روش دوم: می‌توان از رابطهٔ $(fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}$ نیز بهره گرفت.

روش سوم: $(۰,۱)$ روی fog است ، $(۱,۰)$ باید روی $(fog)^{-۱}$ باشد.

۵۰۴-(۱) وقتی $x\to۲^-$ عبارت $|x^۳-۸|$ برابر $-(x^۳-۸)$ است داریم

$$\lim_{x\to۲^-}\frac{|x^۳-۸|}{x-\sqrt{۲x}} = \lim_{x\to۲^-}\frac{-(x^۳-۸)}{(\sqrt{x}-\sqrt{۲})\sqrt{x}} = \frac{-(x-۲)(x^۲+۲x-۴)}{(\sqrt{x}-\sqrt{۲})\sqrt{x}} =$$

$$\frac{-(\sqrt{x}-\sqrt{۲})(\sqrt{x}+\sqrt{۲})(x^۲+۲x-۴)}{(\sqrt{x}-\sqrt{۲})\sqrt{x}} = \frac{-(\sqrt{x}+\sqrt{۲})(x^۲+۲x-۴)}{\sqrt{x}} = -۲۴$$

روش دوم: می‌توان از قاعدهٔ هوپیتال نیز به همین نتیجه رسید.

۵۰۵-(۱) با استفاده از هم ارزی‌های $\tan۲x\approx۲x$ و $۱-\cos x\approx\frac{x^۲}{۲}$ داریم

$$\lim_{x\to۰}\frac{\tan۲x}{\sqrt{۱-\cos x}} = \lim_{x\to۰^-}\frac{۲x}{-x/\sqrt{۲}} = -۲\sqrt{۲}$$

روش دوم: می‌توان از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کرد.

روش سوم: می‌توان ابتدا از فرمول نصف قوس و سپس هم ارزی به نتیجه رسید.

روش چهارم: ابتدا صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب نمایید.

۵۰۶-(۴) مجانب افقی نمودار $y=۲$ است و $\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{۲x+۳}} = ۲$

مجانب قائم ریشه معادله $x-\sqrt{۲x+۳}$ یا $x^۲=۲x+۳$ است که ریشه‌های معادله $x=-۱$ و $x=۳$ است و چون $x=-۱$ جزو دامنه نیست مجانب قائم $x=۳$ است و محل تلاقی دو مجانب نقطه $(۳,۲)$ است.

۵۰۷ - (۳) باید معادله $3x^2+ax+a-3=0$ ریشه نداشته باشد بنابراین :

$$\Delta'<0 \Rightarrow a^2-4\times3(a-3)<0 \Rightarrow a^2-12a+36<0 \Rightarrow (a-6)^2<0$$

چون $(a-6)^2$ همواره نامنفی است بنابراین مجموعه جواب مورد نظر ϕ است.

۵۰۸ - (۴)

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} [x]+a = 1+a$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{|x-1|}{x^2-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

باید حد راست و چپ برابر باشد در نتیجه $1+a=-\frac{1}{2}$ یا $a=-\frac{3}{2}$ است.

روش دوم: باید حد چپ برابر مقدار تابع باشد.

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow \frac{1}{2} = 1+a \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

۵۰۹ - (۱) از تعریف مشتق و فرض نتیجه می‌شود $f'(2)=\frac{-2}{3}$ درنتیجه :

$$y'=\big(f(\sqrt{x-1})\big)'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}.f'(\sqrt{x-1}) \Rightarrow f(\sqrt{x-1})\Big|_{x=5} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5-1}}.f'(\sqrt{5-1})=\frac{1}{4}\times\frac{-2}{3}=-\frac{1}{6}$$

۵۱۰ - (۲) نقطه $A(2,-2)$ بر روی منحنی است و چون :

$$y' = \frac{(2/2\sqrt{2x})(1-x)-(-1)\sqrt{2x}}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{\sqrt{2x}\,(1-x)^2}$$

شیب مماس بر منحنی در نقطه A برابر $m=\frac{3}{2}$ است و معادله مماس $y+2=\frac{3}{2}(x-2)$ یا $y=\frac{3}{2}x-5$ است و عرض از مبدأ این خط برابر ۵- است.

۵۱۱ - (۱) تابع هموگرافیکی که مرکز تقارن نمودار آن روی نیمساز ناحیه اول واقع است بصورت $y=\frac{ax+b}{x-a}$ است داریم :

$$y=ax+b+\frac{2x^2}{x-1} = \frac{(a+2)x^2+(b-a)x-b}{x-1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+۲=۰ \\ b-a=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-۲ \\ b=-۱ \end{cases}$$

۵۱۲ - (۴) تابع در $x=۰$ مشتق راست و چپش به ترتیب ۱ و ۱- است.

$$f_+'(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{|x|-|۰|}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x}{x}=۱$$

$$f_-'(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{|x|-|۰|}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x}{x}=-۱$$

۵۱۳ - (۲) در $x=\frac{\pi}{۴}$ حد چپ $\cos\frac{\pi}{۴}$ - یا $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است ولی حد راست برابر $\sin\frac{\pi}{۴}$ یا $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است چون حد چپ و راست برابر نیستند تابع در $x=\frac{\pi}{۴}$ ناپیوسته است. عدم پیوستگی عدم مشتق‌پذیری را نیز نتیجه می‌دهد.

۵۱۴ - (۲) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} x^۲=۱$ و $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(۲x-۱)=۱$

$$\begin{cases} f_+'(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+} x+۱=۲ \\ f_-'(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۲x-۱-۱}{x-۱}=۲ \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در ۱ مشتق دارد}$$

۵۱۵ - (۳) در $x=x_۰$ تابع صعودی است و تقعر آن به سمت بالاست.

۵۱۶ - (۲) مشتق دوم تابع برابر $y''=۲۰x^۳$ بوده و در $x=۰$ مساوی صفر است و تغییر علامت می‌دهد.

۵۱۷ - (۲) دوره تناوب $y=\tan^۳ax$ برابر $\frac{\pi}{a}$ و دوره تناوب $y=\sin^۲\frac{۳x}{۲}$ برابر $\frac{\pi}{۳/۲}$ یا $\frac{۲\pi}{۳}$ است بنا به فرض $\frac{\pi}{a}=۲\frac{۲\pi}{۳}$ یا $a=\frac{۳}{۴}$ است.

۵۱۸ - (۱) فاصلهٔ مبدأ تا نقطه (x,y) روی منحنی را یافته ولی آنرا محاسبه می‌کنیم داریم:

$$d=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{۲y+۵+y^۲}=\sqrt{y^۲+۲y+۵}$$

ریشه d' بازای $y=-۱$ حاصل می‌شود و کمترین فاصله نیز بازای $y=-۱$ برابر

$\sqrt{۴}$ یا ۲ است.

روش دوم : می‌توان مینیمم $d^۲$ را یافته و سپس جذر آن را محاسبه نمود.

روش سوم : می‌توان d را بر حسب x محاسبه نمود ولی راه حل طولانی خواهد شد.

۵۱۹ - (۴) حد بصورت مبهم $۱^{\pm\infty}$ است باید رفع ابهام شود داریم :

$$A = \lim_{h\to ۰}(۱+۲h)^{۲/h} \Rightarrow \ln A = \lim_{h\to ۰} \ln(۱+۲h)^{۲/h} =$$

$$\lim_{h\to ۰} \frac{۲}{h} \ln(۱+۲h) = \lim_{h\to ۰} \frac{۲(۲/(۱+۲h))}{۱} = ۴ \Rightarrow A = e^۴$$

$$y' = \frac{-۱}{\sqrt{۱-x^۲}} e^{Arccosx} \Rightarrow m = y'(۰) = -e^{\pi/۲} \qquad (۱) - ۵۲۰$$

۵۲۱ - (۳) اگر معادله دایره را بصورت $(x-۱)^۲ + y^۲ = \frac{۲۴}{۵}$ بنویسید.

شعاع دایره $R = \sqrt{\frac{۲۴}{۵}}$ و مرکز آن $(۱ , ۰)$ است و داریم :

$$OH = \frac{|۲-۰|}{\sqrt{(-۲)^۲+۱}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} \Rightarrow ۲x = ۲\sqrt{R^۲-OH^۲} = ۲\sqrt{۴} = ۴$$

۵۲۲ - (۴) ابتدا شیب مماس در نقطه $(۱ , ۱)$ را می‌یابیم داریم:

$$۳x^۲-۲y^۲ = ۱ \Rightarrow ۶x-۴yy' = ۰ \Rightarrow y' = \frac{۳x}{۲y} \Rightarrow m = y'(۱) = \frac{۳}{۲}$$

شیب خط قائم $-\frac{۲}{۳}$ و معادله قائم $y-۱ = -\frac{۲}{۳}(x-۱)$ یا $۳y+۲x = ۵$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_۰^x t^۲\,dt = x^۲ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ۱ \qquad (۴) - ۵۲۳$$

۵۲۴ - (۱) هنگامی که x در فاصلهٔ $(۰ , -\frac{\pi}{۲})$ است مقدار $sinx$ در فاصله $(۰,-۱)$ است و $[sinx] = -۱$ همینطور وقتی x در فاصلهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ قرار دارد $sinx$ در فاصلهٔ $(۰,۱)$ بوده و $[sinx] = ۰$ بنابراین داریم :

$$\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} [sinx]\,dx = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{۰} (-۱)\,dx + \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} ۰\,dx = -\frac{\pi}{۲} + ۰ = -\frac{\pi}{۲}$$

$$\int_{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}^{۱} \frac{۱}{۱+x^۲}\,dx = Arctanx\ \Big]_{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}^{۱} = \frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۶} = \frac{\pi}{۱۲}$$ **۵۲۵ - (۲)**

۵۲۶ - (۲) در دو شکـــل داده تســاویهای $۲\times۳ = (۱+۲) + (۲+۱)$ و $۳\times۴=(۱+۲+۳) + (۳+۲+۱)$ تساوی

$$(۱+ \cdots +n)+(n+ \cdots +۱)=n(n+۱)$$

برای هر n بدست می‌آید و عبارت خواسته شده به ازای $n=۱۰۱$ برای ۱۰۱×۱۰۲ یا ۱۰۳۰۲ است.

روش دوم : با استفاده از تساوی $۱+۲+\cdots+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ عبارت برابر $n(+۱)$ است.

۵۲۷ - (۲) با توجه به مطالب درس واضح است.

۵۲۸ - (۳) مجموعه هاشورزده اعضای موجود در A و B است که خارج C واقعند یعنی مجموعه برابر است با:

$$A\cap B - C = A\cap B\cap C' = A\cap(B- C)$$

۵۲۹ - (۳) چون $A\cap B$ دو عضو دارد در نتیجه $A\times B$ و $B^۲$ چهار عنصر مشترک دارند و چون $A\times B$ دارای $۳\times۴-۴=۸$ عضو است توجه کنید که (a,d) و (d,a) در $A\times B$ دو بار تکرار می‌شود. بنابراین $A\times B-B^۲$ تعداد $۸-۲=۶$ عضو دارد.

روش دوم : مجموعهٔ $A\times B-B^۲$ دارای ۶ عنصر است زیرا :

$$A\times B-B^۲ = A\times B - B\times B = (A - B)\times B = \{b,c\}\times\{a,d,f\}$$

۵۳۰ - (۳) رابطهٔ $(a,b)\,R\,(c,d)$ که توسط رابطهٔ $a+c = b+d$ تعریف می‌شود خواص بازتابی و تراگذری را ندارد زیرا برای مثال $(۱,۲)\,R\,(۳,۴)$ است ولی $(۱,۲)\,R\,(۳,۴)$ درست نیست.

$۳^۴ = ۸۱ \overset{۱۷}{\equiv} -۴ \Rightarrow ۳^۸ \overset{۱۷}{\equiv} (-۴)^۲ \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow$ (۱) - ۵۳۱

$۳^{۱۶} \overset{۱۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۲۰} = ۳^{۱۶} \times ۳^۴ \overset{۱۷}{\equiv} ۱ \times (-۴) \overset{۱۷}{\equiv} ۱۳$

۵۳۲ - (۴) اگر B و C دو طرف قطر گذرنده از A باشند کمان BAC از نیمدایره بزرگتر است بنابر این باید هر دوی B و C یک طرف قطر گذرنده از A باشند واین انتخاب $\frac{۱}{۲}$ حالت احتمال دارد. بعلاوه اگر B و C یک طرف قطر گذرنده از A باشند $\frac{۱}{۲}$ احتمال دارد که B از C به A نزدیکتر باشد و مجموعاً $\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}$ احتمال موجود است که کمان BAC کمتر از نیمدایره باشد.

$P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B') = \frac{۱}{۴} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۶}$ (۱) - ۵۳۳

۵۳۴ - (۲) کلاً از بین ۱۲ نفر ۴ نفر انتخاب می‌شوند و از ۵ دانش‌آموز تجربی یک نفر یا صفر نفر و از ۷۰ دانش‌آموز رشته ریاضی ۳ یا ۴ نفر انتخاب می‌شوند و مجموعاً $\binom{۷}{۴} + \binom{۵}{۱}\binom{۷}{۳}$ حالت برای انتخاب وجود دارد و داریم :

$$\text{احتمال مورد نظر} = \frac{\binom{۷}{۳}\binom{۵}{۱} + \binom{۷}{۴}}{\binom{۱۲}{۴}} = \frac{۱۴}{۳۳}$$

$P(a) + P(b) + P(c) = ۱ \Rightarrow P(a) + \frac{P(a)}{۳} + \frac{۲}{۳} P(a) = ۱$ (۲) - ۵۳۵

$P(a) = \frac{۱}{۲}$ $p(\{b,c\}) = P(b) + P(c) = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$

۵۳۶ - (۳) واضح است.

۵۳۷ - (۱) با توجه به فرمولهای $z^n = r^n \left(cosn\theta + isinn\theta \right)$ و $z\bar{z} = a^۲ + b^۲$ داریم :

$$\frac{z^۶}{z \cdot \bar{z}} = \frac{[۲(cos(-\pi/۶) + isin(-\pi/۶))]^۶}{(\sqrt{۳})^۲ + (-۱)^۲} =$$

$$= \frac{۲^۶(cos(-\pi)+isin(-\pi))}{۳+۱} = -۱۶$$

۵۳۸ -(۱) اگر مقدار مورد نظر را x بنامیم آنگاه از شرایط داده شده برای x معادلهٔ $\frac{۱}{۳}x^۲-۹=۲x$ یا $x^۲-۶x-۲۷=۰$ حاصل می‌شود. از دستور دلتا (Δ) داریم

$$x=\frac{-(-۶)\pm\sqrt{۶^۲+۴\times۲۷}}{۲} \Rightarrow x=-۳ \text{ و } x=۹$$

چون مقدار مورد نظر مثبت است جواب $x=۹$ قابل قبول است.

روش دوم: از دستور دلتاپریم (Δ') نیز می‌توان به همین نتیجه رسید.

روش سوم: می‌توان معادله را بصورت $(x-۹)(x+۳)=۰$ نوشت و نتیجهٔ قبلی رسید.

۵۳۹ -(۲) از تساوی $۲a^۲+۴b^۲-۴ab-۲a+۱=۰$ می‌توان تساوی $(a-۲b)^۲+(a-۱)^۲=۰$ را نتیجه گرفت اکنون مجموع دو عبارت نا منفی برابر صفر شده است پس هر دوی آنها صفر هستند در نتیجه $a-۲b=۰$ و $a-۱=۰$ از این دو تساویهای $a=۱$ و $b=\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $a+b=\frac{۳}{۲}$ بدست می‌آید.

۵۴۰ -(۳) اگر تعداد لیوانها را x در نظر بگیریم آنگاه تساویهای $x=۱۶n+۳$ و $x=۲۸m+۳$ و در نتیجه $۲۸m=۱۶n$ یا $\frac{m}{n}=\frac{۴}{۷}$ حاصل می‌شود. کوچکترین مقدار برای m و n به‌ترتیب برابر ۴ و ۷ می‌باشد بنابراین

$$x = ۱۶(۷)+۳ = ۱۱۵$$

۵۴۱ -(۴) با فرض $a=y-۲$ و $b=-۳y+۱$ با توجه به اتحاد یک جمله مشترک عبارت $x^۲+x(-۲y-۱)+(-۳y+۱)(y-۲)$ را تجزیه می‌کنیم

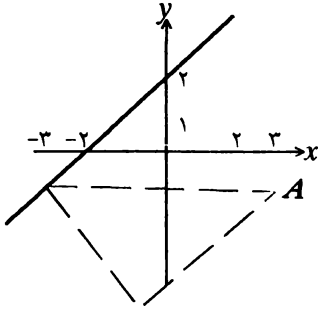
$$x^۲+x(-۲y-۱)+(-۳y+۱)(y-۲)=(x-۳y+۱)(x+y-۲)$$

روش دوم: اگر بجای x و y مقدار ۰ و ۰ را قرار دهیم عبارت برابر ۲- می‌شود و گزینه‌های ۲ و ۳ باطل می‌شوند و بار دیگر اگر بجای x و y مقدار ۱ و ۱ را

قرار دهیم عبارت برابر ۰ می‌شود و گزینه ۱ نیز باطل می‌شوند.

روش سوم: اگر در گزینه ۴ بجای x عبارت $y+۲-$ را در عبارت $x^۲+x(-۲y-۱)+(-۳y+۱)(y-۲)$ قرار دهیم عبارت صفر می‌شود. بقیهٔ گزینه‌ها چنین نیستند.

۵۴۲ -(۲) ضلع و رأس مربع و نیز قطر مورد نظر در شکل مقابل مشخص شده است. چون طول ضلع مربع برابر فاصلهٔ رأس و ضلع است واضح است که طول ضلع برابر $\frac{|-۱-۳-۲|}{\sqrt{۲}}$ یا $۳\sqrt{۲}$ است و قطر مربع برابر است با



$$d=\sqrt{(۳\sqrt{۲})^۲+(۳\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۱۸+۱۸}=۶$$

روش دوم: طول قطر مربع $\sqrt{۲}$ برابر طول ضلع آن می‌باشد. بنابر این طول قطر برابر $\sqrt{۲}\times(۳\sqrt{۲})$ یا ۶ است.

روش سوم: معادلهٔ قطر مربع بصورت $y=-۱$ است و مختصات سر دیگر قطر بصورت $(-۳,-۱)$ است و از روی مختصات نیز طول قطر برابر ۶ است.

۵۴۳ -(۲) با توجه به آنکه ± ۲ جزء دامنهٔ متغیر نیستند داریم

$$\frac{x-۲}{x+۲}+\frac{x}{x-۲}=\frac{۸}{x^۲-۴} \Rightarrow \frac{(x-۲)^۲+x(x+۲)}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{۸}{x^۲-۴}$$

$$۲x^۲-۲x+۴=۸ \Rightarrow x^۲-x-۲=۰ \Rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{(۱)^۲+۴\times۲}}{۲}=۲ \text{ و } -۱$$

با توجه به آنکه ± ۲ جزء دامنهٔ متغیر نیستند فقط $x=-۱$ قابل قبول است.

۵۴۴ -(۱) اگر جملهٔ اول را $a_۱=a$ و قدر نسبت را q در نظر بگیریم با توجه به فرض مسأله داریم

$(aq+aq^{۲}+aq^{۳}+\ldots)$ نصف مجموع بقیهٔ جملات = جملهٔ اول $\Rightarrow a_{۱}=a=\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow a_{۱}=a=\frac{۱}{۲}\left(\frac{aq}{۱-q}\right) \Rightarrow ۲(۱-q)=q \Rightarrow q=\frac{۲}{۳} \Rightarrow$

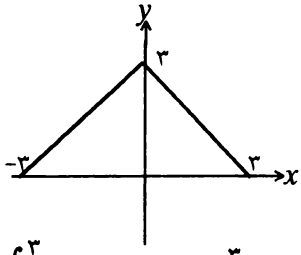
$a_{۳}=a\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲} \Rightarrow a_{۱}=\frac{۹}{۴}a_{۳}$

۵۴۵ -(۱) $\log_{۹}(x-۴)=۱-\log_{۳}۲ \Rightarrow \log_{۹}(x-۴)=\log_{۹}۹-\log_{۹}۴=\log_{۹}\frac{۹}{۴}$

$x-۴=\frac{۹}{۴} \Rightarrow x=\frac{۲۵}{۴}=۶/۲۵$

روش دوم: اگر مقدار هر گزینه را در معادلهٔ $\log_{۹}(x-۴)=۱-\log_{۳}۲$ جایگزین کنیم براحتی دیده می‌شود که مقدار $x=۶/۲۵$ در معادله صادق است.

۵۴۶ -(۴) نمودار معادلهٔ $y=۳-|x|$ بصورت مقابل است ناحیهٔ مورد نظر مثلثی قائم‌الزاویه است و مساحت آن برابر است با



$S=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۶ = ۹$

روش دوم: $S=\int_{-۳}^{۳}(۳-|x|)dx=۲\int_{۰}^{۳}(۳-x)dx = ۶x-x^{۲}\Big]_{۰}^{۳} = ۱۸-۹ = ۹$

روش سوم: ناحیهٔ مذکور نیمی از یک مربع به ضلع $۳\sqrt{۲}$ است. و مساحت آن برابر $\frac{۱}{۲}(۳\sqrt{۲})^{۲}$ یا ۹ است.

۵۴۷ -(۱) باید اولاً $\Delta<۰$ و ثانیاً $a\geq ۰$ باشد. بنابراین داریم

$\Delta'<۰ \Rightarrow (۱)^{۲}-۴a^{۲}<۰ \Rightarrow a^{۲}>\frac{۱}{۴} \Rightarrow a<-\frac{۱}{۲}$ یا $a>\frac{۱}{۲}$

با توجه به شرط $a\geq ۰$ مجموعه جواب $a>\frac{۱}{۲}$ است.

۵۴۸ -(۳) تنها درگزینهٔ ۳ هر خط عمود بر محور x ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۵۴۹ -(۲) اگر در چند جمله‌ای $P(x)=x^{۴}+ax^{۳}+bx^{۲}+x+۱$ بجای $x^{۲}$

مقدار ۱ را قرار دهیم عبارت صفر می‌شود.

$P(x)=(1)^2+ax+b+x+1=0\Rightarrow(a+1)x+b+2=0 \Rightarrow a=-1$ و $b=-2$

روش دوم: بـــاید چـــند جـــمله‌ای $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+x+1$ بـر $(x+1)(x-1)$ بخشپذیر باشد بنابراین $P(1)=0$ و $P(-1)=0$، داریم

$1-a+b-1+1=0 \Rightarrow 2b=-4\Rightarrow b=-2$ و $1+a+b+1+1=0$

روش سوم: می‌توان چند جمله‌ای $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+x+1$ را بر x^2-1 تقسیم نمود و باقیمانده را برابر صفر قرار داد و به نتیجهٔ مشابه رسید.

۵۵۰ -(۱) $\dfrac{\sin 10x-\sin 6x}{\cos 10x+\cos 6x}=\dfrac{2\sin 2x\cos 8x}{2\cos 2x\cos 8x}=\tan 2x$

روش دوم: با جایگزینی ۰ و $\dfrac{\pi}{4}$ بجای x در عبارت $\dfrac{\sin 10x-\sin 6x}{\cos 10x+\cos 6x}$ به‌ترتیب مقادیر ۰ و $\pm\infty$ حاصل می‌شود که تنها گزینهٔ ۱ نیز چنین است.

۵۵۱ -(۳) مـعادلهٔ $\tan(\dfrac{3\pi}{2}-x)=\cot(a+x)$ را مـی‌توان بـصورت $\cot(x)=\cot(a+x)$ نوشت و از آن تساوی $a=k\pi$ را بدست آورد. و به‌ازای $k=1$ گزینهٔ ۳ حاصل می‌شود.

روش دوم: با جایگزینی $x=\dfrac{\pi}{2}$ تساوی $-\tan a=0$ بدست می‌آید. و از آن جواب $a=k\pi$ را بدست می‌آید. و به‌ازای $k=1$ گزینهٔ ۳ حاصل می‌شود.

روش سوم: با استفاده از اتحادهای مثلثاتی نیز می‌توان به نتیجه رسید.

۵۵۲ -(۳) ابتدا از اتحاد مزدوج و سپس هم‌ارزی $\sin u$ و u داریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2(1+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\times\frac{3x}{2}\times\frac{x}{2}}{2x^2}=\frac{3}{4}$$

روش دوم: حد صورت مبهم $\frac{0}{0}$ را دارد می‌توان از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کرد.

۵۵۳- (۴) $-sinx+\sqrt{3}cosx=1 \Rightarrow -sinx+tan\frac{\pi}{3}cosx=1 \Rightarrow \frac{-sinx\,cos\pi/3+sin\pi/3\,cosx}{cos\pi/3}=1 \Rightarrow sin(\pi/3-x)=\frac{1}{2}$

جوابهای معادلهٔ اخیر $\frac{\pi}{3}-x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3}-x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$ است که پس از ساده شدن بصورت $x=-2k\pi+\frac{\pi}{6}$ و $x=-2k\pi-\frac{\pi}{2}$ در می‌آید. و $x=-2k\pi+\frac{\pi}{6}$ همان گزینهٔ ۴ است. توجه کنید که k عددی صحیح است.

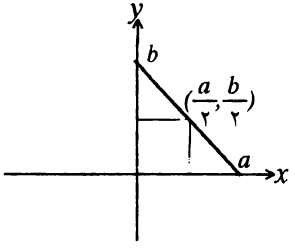
روش دوم: با جایگزینی جوابها در معادلهٔ $-sinx+\sqrt{3}cosx=1$ می‌توان سریعتر به همین نتیجه رسید.

روش سوم: اگر طرفین معادلهٔ $-sinx+\sqrt{3}cosx=1$ را به توان دو برسانیم مجدداً می‌توان به نتیجه رسید.

۵۵۴- (۲) از شرط پیوستگی f در $x=0$ استفاده می‌کنیم چون $f(0)=a$، باید حد $f(x)$ وقتی x به سمت صفر میل می‌کند نیز برابر a باشد.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=a \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}[[x]-x]=a \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}[0-x]=a \Rightarrow -1=a$$

۵۵۵- (۳) اگر پاره خط AB محورهای مختصات را در نقاط $(a,0)$ و $(0,b)$ قطع کند در این صورت نقطهٔ وسط AB $(x,y)=(\frac{a}{2},\frac{b}{2})$ می‌باشد چون طول پاره خط AB برابر ۱۶ است خواهیم داشت



$$a^2+b^2=16^2 \Rightarrow (2x)^2+(2y)^2=256 \Rightarrow x^2+y^2=64$$

روش دوم: اگر خط بصورت عمودی قرار گیرد نقطهٔ $(0,8)$ وسط AB است و

اگر خط زاویهٔ ۴۵ درجه با محور xها بسازد نقطهٔ $(۴\sqrt{۲}, ۴\sqrt{۲})$ وسط AB است و این دو نقطه فقط در مکان گزینهٔ ۳ صدق می‌کند.

۵۵۶- (۴)

$$g(x)=f(\frac{۱}{x}) \Rightarrow g'(x)=-\frac{۱}{x^۲}f'(\frac{۱}{x})=-\frac{۱}{x^۲}\frac{۱}{\sqrt{۱+۱/x^۲}} \Rightarrow$$

$$g'(\frac{۳}{۴})=-(\frac{۴}{۳})^۲\frac{۱}{\sqrt{۱+(۴/۳)^۲}}=-\frac{۱۶}{۱۵}$$

۵۵۷- (۱)

$$\int(\frac{sin۳x}{cosx}+tanx)\,dx=\int\frac{sin۳x+sinx}{cosx}\,dx$$

$$\int\frac{۲sin۲xcosx}{cosx}\,dx=\int ۲sin۲x\,dx=-cos۲x+c$$

۵۵۸- (۳) ابتدا محل برخورد نمودار $y=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶-x^۲}$ و خط $y=\sqrt{۳}$ را محاسبه می‌کنیم

$$\sqrt{۳}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶-x^۲} \Rightarrow ۱۲=۱۶-x^۲ \Rightarrow ۴=x^۲ \Rightarrow x=\pm ۲$$

چون در فاصلهٔ $[-۲,۲]$ مقادیر تابع $g(x)=\sqrt{۳}$ کمتر از مقادیر تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶-x^۲}$ است با استفاده از فرمول حجم داریم

$$V=\int_{-۲}^{۲}\pi[(f(x))^۲-(g(x))^۲]dx=۲\int_{۰}^{۲}\pi[\frac{۱}{۴}(۱۶-x^۲)-۳]\,dx=$$

$$\int_{۰}^{۲}\frac{\pi}{۲}(۴-x^۲)\,dx=\frac{\pi}{۲}(۴x-\frac{۱}{۳}x^۳)\Big]_{۰}^{۲}=\frac{۸\pi}{۳}$$

روش دوم: می‌توان از فرمول $V=\left|\int_{-۲}^{۲}\pi[(g(x))^۲-(f(x))^۲]dx\right|$ یا $V=\left|\int_{-۲}^{۲}\pi[(f(x))^۲-(g(x))^۲]dx\right|$ نیز استفاده نمود.

۵۵۹- (۴)

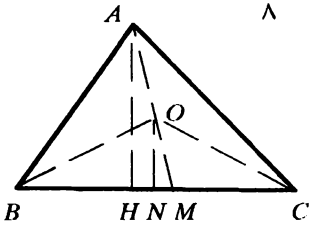
$$\begin{cases} m\angle A+m\angle B=۹۰^\circ \\ m\angle A=\frac{۴}{۹}(۱۸۰-m\angle B) \end{cases} \Rightarrow A \text{ زاویهٔ } = m\angle A=۷۲^\circ$$

۵۶۰- (۲)

تعداد قطرها = تعداد اضلاع×۲ $\Rightarrow \frac{n(n-۳)}{۲}=۲n \Rightarrow n^۲-۷n=۰ \Rightarrow n=۷$

۵۶۱ -(۲) در یک n ضلعی منتظم هر زاویه برابر $\frac{(n-۲)۱۸۰^\circ}{n}$ است. برای هشت ضلعی منتظم هر زاویه برابر $\frac{(۸-۲)۱۸۰^\circ}{۸} = ۱۳۵$ است.

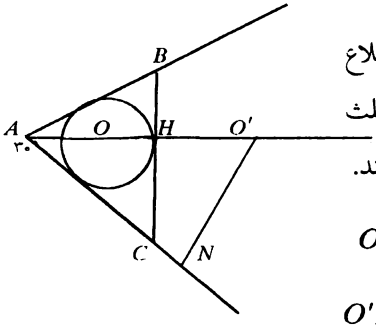
۵۶۲ -(۴) در شکل مقابل ملاحظه می‌کنید دو مثلث AMH و OMN متشابه هستند در نتیجه داریم



$$\frac{OM}{AM} = \frac{ON}{AH}$$

$$\frac{۱/۲ON.BC}{۱/۲AH.BC} = \frac{S'}{S}$$

۵۶۳ -(۱) در مثلث متساوی‌الاضلاع مراکز دوایر محیطی و محاطی داخلی مثلث در نقطهٔ تلاقی میانه‌ها بر یکدیگر منطبقند.



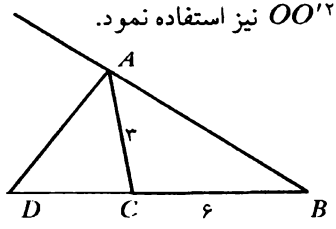
$$OH = \frac{۱}{۳}AH = \frac{۱}{۳}\frac{a\sqrt{۳}}{۲} = \frac{a\sqrt{۳}}{۶}$$

$$O'H = O'N = r_a = \frac{s}{p-a} = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

$$OO' = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} + \frac{a\sqrt{۳}}{۶} = \frac{۲a\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۲(\sqrt{۳})\sqrt{۳}}{۳} = ۲$$

روش دوم: می‌توان از رابطهٔ $OO'^۲ = R(R+۲r)$ نیز استفاده نمود.

۵۶۴ -(۲) با توجه به شکل مقابل و اطلاعات $a=۶$ و $b=\frac{۶}{۲}=۳$ و $c=۳b-۱=۸$ خواهیم داشت

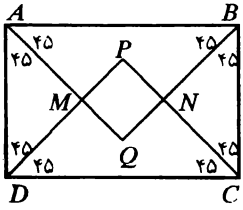


$$DC = \frac{ba}{c-b} = \frac{۳\times۶}{۸-۳} = \frac{۱۸}{۵} = ۳/۶$$

۵۶۵ -(۳) اگر ناحیه‌ای به مساحت S روی صفحه‌ای که با صفحهٔ ناحیه زاویهٔ α می‌سازد تصویر شود مساحت تصویر برابر $S'=Scos\alpha$ است داریم

$$S' = Scos\alpha \Rightarrow \frac{S}{۲} = Scos\alpha \Rightarrow cos\alpha = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۳}$$

۵۶۶ -(۲) با توجه به شکل مقابل چون $PD=PC$ و $NC=MD$ بنابراین $PN=MQ$ و بصورت مشابه بقیهٔ اضلاع چهار ضلعی برابرند. همینطور چون مثلث BNC قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است ضلع N نیز چنین است و در نتیجه چهار ضلعی مربع است.



۵۶۷ -(۴) در واقع دو هرم متشابه با نسبت تشابه ۱ ایجاد می‌شود که نسبت حجم آن دو برابر است با

$$\frac{V'}{V} = (\frac{h'}{h})^{۳} = (\frac{۱}{۲})^{۳} = \frac{۱}{۸}$$

۵۶۸ -(۱) اگر ضرب داخلی دو بردار برابر صفر باشد آندو بر هم عمودند.

۵۶۹ -(۲) شرط توازی خط D و صفحه P آن است که $n_P.n_D=۰$، داریم

$$m\times۱+۲\times۱+(-۱)(-۱)=۰ \Rightarrow m+۳=۰ \Rightarrow m=-۳$$

۵۷۰ -(۱)
$$d=\frac{|-۱|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۵۷۱ -(۲) نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ باید روی خط هادی سهمی واقع باشد چون $p=۲$، معادلهٔ خط هادی بصورت $x=x_۰-\frac{p}{۲}=۰-\frac{۲}{۲}=-۱$ خواهد بود در نتیجه α برابر -۱ است.

۵۷۲ -(۱) نقطه $A(۰,۱)$ یکی از رأسهای کانونی بیضی $y^۲+۴x^۲-۲ay=۵$ است پس مختصات آن در معادلهٔ بیضی صادق است داریم

$$۱^۲+۴\times۰^۲-۲a\times۱=۱۵ \Rightarrow ۱-۲a=۱۵ \Rightarrow a=-۷$$

۵۷۳ -(۳) قرینهٔ خط $y+۲x=۳$ نسبت به نقطهٔ A مجانب دیگر منحنی است با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$ معادلهٔ $y=۲x-۱$ حاصل می‌شود.

روش دوم: محل تقاطع مجانب و محور کانونی مرکز تقارن هذلولی است در اینجا محور کانونی $x=۱$ است. و محل تقاطع مجانب و محور کانونی نقطهٔ

(۱,۱) است و مجانب دیگر نیز باید از این نقطه بگذرد و فقط خط گزینهٔ ۳ از این نقطه می‌گذرد.

$$\binom{n}{۸} = ۲\binom{n}{۷} \Rightarrow \frac{n!}{۸!\,(n-۸)!} = \frac{۲n!}{۷!\,(n-۷)!} \qquad (۴)-۵۷۴$$

$$= ۷!\,(n-۷)! = ۲\times۸!\,(n-۸)! \Rightarrow ۷!\,(n-۷)(n-۸)! = ۲\times۸\times۷!\,(n-۸)! =$$

$$\Rightarrow (n-۷) = ۲\times۸ \Rightarrow n = ۲۳$$

$$A = \{\, ۲k-۱ \mid k\in Z,\ ۰\le k\le ۲ \,\} = \{-۱, ۱, ۳\} \qquad (۳)-۵۷۵$$

$$B = \{\, x \mid x\in N,\ x^۲\le ۹ \,\} = \{۱, ۲, ۳\}$$

چون A و B هر یک سه عنصر دارند در نتیجه $A^۲$ ($A^۲=A\times A$) و $B^۲$ هر یک ۹ عنصر دارند که چهار عنصر (۱,۱) و (۳,۳) و (۳,۱) و (۱,۳) بین $A^۲$ و $B^۲$ مشترک هستند در نتیجه $B^۲-A^۲$ دارای ۵ عنصر است و در نتیجه $B^۲-A^۲$ دارای $۲^۵ = ۳۲$ زیر مجموعه است.

$$\begin{cases} a+۱۷ = ۲۱n \\ a = ۲۹m+۱۲ \end{cases} \Rightarrow ۲۹m+۱۲+۱۷ = ۲۱n \Rightarrow ۲۹(m+۱) = ۲۱n \Rightarrow ۲۹ \mid n \qquad (۴)-۵۷۶$$

چون n مضرب ۲۹ است کوچکترین مقدار a به‌ازای $n=۲۹$ برابر $a = ۲۱\times۲۹-۱۷ = ۵۹۲$ است.

(۳)-۵۷۷ چون $a \mid bc$ بنابراین $a \mid [b,bc]$ زیرا $[b,bc]=bc$.

(۴)-۵۷۸ چون رابطهٔ R مجموعهٔ Z را به ۵ دستهٔ هم ارزی تقسیم می‌کند بنابراین $m=۵$. توجه کنید که رابطهٔ R همان رابطهٔ همنهشتی به پیمانهٔ m است و چنین رابطه‌ای Z را به m ردهٔ هم‌ارزی تقسیم می‌کند در نتیجه $m=۵$ و چون $۳۷-۱۲=۲۵$ در نتیجه ۳۷ و ۱۲ در یک ردهٔ هم‌ارزی قرار دارند.

$$۱-P(A')-P(A\cap B) = ۱-(۱-P(A))-P(A\cap B) = \qquad (۳)-۵۷۹$$

$$P(A)-P(A\cap B) = P(A-B) = P(A\cap B')$$

۵۸۰- (۳) چون عناصر دو به دو انتخاب می‌شوند فضای احتمال دارای $\binom{۵}{۲}$ عنصر است و در ۶ حالت (۴,۵) و (۳,۴) و (۵,۳) و (۲,۵) و (۱,۵) و (۲,۴) مجموع شماره‌ها بزرگتر از ۵ است. بنابراین

$$P(\text{مجموع شماره‌ها بزرگتر از } ۵) = \frac{\text{مجموع شماره‌ها بزرگتر از } ۵}{\binom{۵}{۲}} = \frac{۶}{۱۰} = ۰/۶$$

۵۸۱- (۴) باید دترمینان مختصات نقاط برابر صفر باشد. داریم

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ -۱ & m & ۱ \\ ۳ & ۱ & -۱ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow -۲m-۱+۳-(۳m+۱+۲) = ۰ \Rightarrow m = -\frac{۱}{۵}$$

۵۸۲- (۱)
$$\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲\sqrt{۳}+۱ \\ \sqrt{۳}-۲ \end{bmatrix}$$

۵۸۳- (۲) بنا به فرض $A'I=A$ در نتیجه $A'=A$ یعنی A متقارن است.

۵۸۴- (۳)
$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲x-y=۳ \\ x-y=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ y=۱ \end{cases} \Rightarrow x+y=۳$$

۵۸۵- (۴)

$$\text{مساحت} = \pi(\text{شعاع})^۲ \Rightarrow S=\pi r^۲ \Rightarrow S'=۲\pi r \Rightarrow S'|_{r=۱۰} = ۲\pi(۱۰) = ۲۰\pi$$

۵۸۶- (۱) توجه کنید که $y'=۳^{x-۱}\ln ۲$ همواره مثبت است.

۵۸۷- (۳)
$$\sum_{k=۴}^{\infty} \frac{۱}{(k-۲)(k-۳)} = \sum_{k=۴}^{\infty} \frac{(k-۲)-(k-۳)}{(k-۲)(k-۳)} =$$

$$\sum_{k=۴}^{\infty} \left(\frac{(k-۲)}{(k-۲)(k-۳)} - \frac{(k-۳)}{(k-۲)(k-۳)} \right) =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=۴}^{n} \left(\frac{۱}{(k-۳)} - \frac{۱}{(k-۲)} \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(۱ - \frac{۱}{n-۲} \right) = ۱$$

$$\int_{۰}^{۲} \frac{dx}{۴+x^۲} = \int_{۰}^{۲} \frac{dx}{۱+(x/۴)^۲} = \frac{۱}{۲} tan^{-۱} \frac{x}{۲} \Big]_{۰}^{۲} = \frac{۱}{۲} \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۸}$$ (۱)- ۵۸۸

$$|\frac{n+۱}{n-۲} - ۱| < \frac{۱}{۱۰} \Leftrightarrow |\frac{۳}{n-۲}| < \frac{۱}{۱۰} \Leftrightarrow |n-۲| > ۳۰$$ (۱)- ۵۸۹

$$\Leftrightarrow n-۲ < -۳۰ \text{ و } n-۲ > ۳۰ \Leftrightarrow n > ۳۲ \text{ و } n < -۲۸$$

$$a_{n+۱} > a_n \Leftrightarrow \frac{n+۱}{n+۱+۱} > \frac{n}{n+۱} \Leftrightarrow \frac{n+۱}{n+۲} > \frac{n}{n+۱} \Leftrightarrow$$ (۲)- ۵۹۰

$$(n+۱)^۲ > n(n+۲) \Leftrightarrow n^۲+۲n+۱ > n^۲+۲n \Leftrightarrow ۱ > ۰$$

چون آخرین نامساوی همواره برقرار است بنابراین دنباله صعودی است.

روش دوم: می‌توان تابع $f(x) = \frac{x}{x+۱}$ را بعنوان تابعی کلی‌تر از دنباله در نظر گرفت و چون $f'(x) = \frac{۱}{(x+۱)^۲}$ همواره مثبت است در نتیجه تابع و دنباله صعودی هستند.

۵۹۱ -(۲) چون اجتماع دو همسایگی باز متقارن یک عدد ، یک همسایگی باز متقارن آن عدد شده است در نتیجه اشتراک دو همسایگی برابر یکی از آنهاست.

روش دوم: چون اجتماع دو همسایگی باز و متقارن یک همسایگی باز و متقارن به مرکز عددی چون a می‌باشند بنابراین دو همسایگی بصورت $(a-\delta, a+\delta)$ و $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ می‌باشند و هر یک از ایندو (یعنی δ و ε) که بزرگتر باشند دیگری را در بر دارند.

۵۹۲ -(۳) حد بصورت $\frac{+\infty}{+\infty}$ است با دو بار استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{x^۲+۱} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + ۱}{۲x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{۱/x}{۲} = \lim_{x \to +\infty} \frac{۱}{۲x} = ۰$$

روش دوم: می‌توان از این نکته استفاده کنید که وقتی x به سمت ∞ میل می‌کند $\ln x$ نسبت به x خیلی کوچکتر است.

۵۹۳ -(۳) نسبت به t (متغیر زمان) از طرفین معادله مشتق می‌گیریم

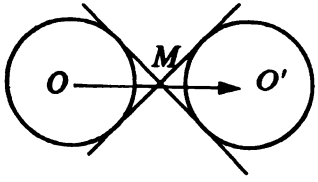
$$y'_t = x'_t \text{ و } y'_t = -۴x'_t \cos x \sin x = -۲x'_t \sin ۲x \Rightarrow \sin ۲x = -\frac{۱}{۲}$$

جوابهای آخرین معادله بصورت $۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶}$ و $۲x = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶}$ می‌باشد که جواب $\frac{۷\pi}{۱۲}$ به‌ازای $k = ۰$ در دومین دسته جواب حاصل می‌شود.

روش دوم: می‌توان از جایگزینی جوابها در معادله نیز به نتیجه رسید.

۵۹۴ -(۲) $f(x) = \operatorname{Arctan}(e^{-x}) \Rightarrow f'(x) = \frac{-e^{-x}}{۱+e^{-۲x}} \Rightarrow f'(۰) = -\frac{۱}{۲}$

۵۹۵ -(۱) در شکل مقابل دو دایره نسبت به انتقال به اندازهٔ بردار OO' و نیز نسبت به تقارن مرکزی، به مرکز M (محل تقاطع مماسهای خارجی) به یکدیگر تبدیل می‌شوند.



۵۹۶ -(۴) عدد $z = ۱ - i$ را بصورت $z = \sqrt{۲}(\cos\frac{۷\pi}{۴} + i\sin\frac{۷\pi}{۴})$ بنویسید.

روش دوم: می‌توان z را در صفحهٔ مختلط مشخص کرد و زاویهٔ قطبی را مشخص نمود.

۵۹۷ -(۲)

$$(fog)(x,y) = f\big(g(x,y)\big) = f(۲x+y, y) =$$

$$(۲x+y+y, ۲x+y-y) = (۲x+۲y, ۲x) \Rightarrow \frac{۱}{۲}(fog)(x,y) = (x+y, x)$$

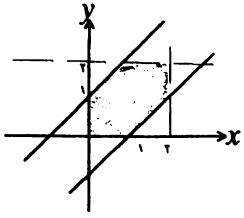
روش دوم: می‌توان ماتریسهای دو نگاشت f و g را در نظر گرفت و آنها را در یکدیگر ضرب نموده و حاصل را بر ۲ تقسیم نمود و در آخر نگاشت مربوطهٔ ماتریس حاصل را نوشت.

۵۹۸-(۴) گراف سادهٔ $G=(V,E)$، $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ از مرتبهٔ ۶ است از آنجا که $E(G)$ پانزده عضو دارد. در نتیجه گراف اخیر کامل از مرتبهٔ ۶ یعنی K_6 است بنابراین درجهٔ هر رأس برابر ۵ بوده و از هر عضو V حداقل ۵ یال می‌گذرد.

۵۹۹-(۴) ۲ مسیر $abde$ و $acde$ به طول ۳ از a به e وجود دارد.

۶۰۰-(۲) تعداد اعداد صحیح و مثبت نابیشتر از ۲۳۱ و اول با آن برابر $(۱-۱۱)(۱-۷)(۱-۳)$ یا ۱۲۰ است. در نتیجه تعداد اعداد صحیح و مثبت نابیشتر از ۲۳۱ و غیراول با آن برابر ۱۲۰-۲۳۱ یا ۱۱۱ است.

۶۰۱-(۱) ناحیه مورد نظر در شکل مقابل هاشور خورده است و مساحت آن برابر ۳ است و چون مربع مساحتش ۴ است بنابراین داریم :



$$p(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

۶۰۲-(۲) از آنجا که مجموع احتمالها ۱ است داریم

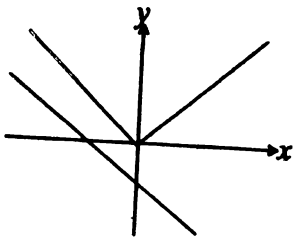
$$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}+\alpha=۱ \Rightarrow \alpha=\frac{۱}{۴}$$

$$E(x)=۵ \Rightarrow ۱\times\frac{۱}{۳}+۳\times\frac{۱}{۴}+۷\times\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۴}x=۵ \Rightarrow x=۱۱$$

۶۰۳-(۲) $x=۰/\overline{۵۹۴} \Rightarrow -x=-۰/\overline{۵۹۴}$ با جمع ۱۰۰۰ $x=۵۹۴/\overline{۵۹۴}$ دو رابطه داریم:

$$۹۹۹x=۵۹۴ \Rightarrow x=\frac{۵۹۴}{۹۹۹}=\frac{۶۶}{۱۱۱}=\frac{۲۲}{۳۷}$$

۶۰۴-(۱) طبق اتحاد مکعب $(x^۳+y^۳)=(x+y)(x^۲-xy+y^۲)$ پس برای $(x^۲+Ax+۱۶)(x+۴)$ داریم $y=۴$ بنابراین $-xy=+Ax \Rightarrow -۴x=Ax$ یعنی $A=-۴$ می‌باشد.



۶۰۵ -(۴) چون نمودار دو معادله $y=|x|$ و $x+y=-۳$ همدیگر را قطع نمی‌کنند پس دستگاه داده شده دارای جواب نیست و لذا گزینهٔ ۴ صحیح است.

روش دوم: در سه حالت $x<۰$ و $x>۰$ و $x=۰$ دستگاه جواب ندارد.

۶۰۶ -(۱) $(x+۶)^۲ = x^۲ + (x+۳)^۲ \Rightarrow x^۲-۶x-۲۷ = ۰ \Rightarrow x = ۹$

در نتیجه طول اضلاع ۹، ۱۲ و ۱۵ است و داریم:

$$۱۵\times h = ۹\times ۱۲ \Rightarrow h = ۷/۲$$

۶۰۷ -(۲) $۳cos۳۰^\circ - ۴cos^۳۳۰^\circ = ۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۴\times(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۳ = ۰$

روش دوم : $۳cos۳۰^\circ - ۴cos^۳۳۰^\circ = -cos(۳\times۳۰^\circ) = -cos۹۰^\circ = ۰$

۶۰۸ -(۱) $\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱} < ۲ \Rightarrow x^۲-۱ < ۲x^۲+۲ \Rightarrow x^۲+۳ > ۰$

برای هر عدد حقیقی نامساوی $x^۲+۳ > ۰$ برقرار است.

روش دوم : بازای $x=۲$ نامساوی $\frac{۲^۲-۱}{۲^۲+۱} = \frac{۳}{۵} < ۲$ برقرار است و $x=۲$ فقط در گزینهٔ ۱ قرار دارد.

روش سوم : صورت کسر $\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}$ همواره از مخرج آن کوچکتر است در نتیجه عبارت $\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}$ برای هر عدد حقیقی از ۱ و درنتیجه از ۲ کمتر است.

۶۰۹ -(۳) هنگامی که $\frac{-\pi}{۲} < x < ۰$ تابع $y = |sinx|$ اکیداً صعودی و در نتیجه یک به یک است.

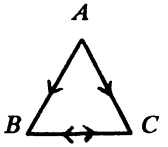
روش دوم: گزینه های ۱ و ۲ تابع نیستند. چون نقاط $(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$ و $(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲})$ متعلق به آندو است و گزینهٔ ۴ نیز یک به یک نمی‌باشد چون

$(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲})$ و $(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$ روی نمودار است و فقط گزینهٔ ۳ می‌تواند تابع یک به یک باشد.

۶۱۰ -(۳) از تبدیل $y \to -y$ قرینه $y+۲x=۱$ نسبت به محور xها بصورت $-y+۲x=۱$ یا $y = ۲x-۱$ حاصل می‌شود.

روش دوم :نقطه $(۰,۱)$ روی خط $y+۲x=۱$ است و نقطه $(۰,-۱)$ باید روی قرینه Δ باشد و گزینهٔ ۱ و ۲ باطل است از طرفی شیب قرینهٔ Δ نسبت به محور xها قرینهٔ شیب Δ است و گزینهٔ ۴ باطل است.

۶۱۱ -(۱)



$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

۶۱۲ -(۳) چون $sinx$ و $cosx$ در فاصلهٔ $[-۱,۱]$ است پس $[cosx]$ و $[sinx]$ هردو مقادیر ۱ و ۰ و ۱- را اختیار می‌کنند و مجموع آن دو یعنی $y = [sinx] + [cosx]$ مقادیر ۲- و ۱- و ۰ و ۱ را اختیار خواهد کرد. توجه کنید که هردوی $[cosx]$ و $[sinx]$ نمی‌توانند با هم برابر ۱ باشند.

روش دوم : $۰<x<\frac{\pi}{۲} \Rightarrow y = ۰ \quad x=۰$ یا $x=۱ \Rightarrow y = ۱$

$$\frac{\pi}{۲}<x\leq \pi \Rightarrow y = -۱ \quad \pi<x<\frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow y = -۲$$

$$\frac{۳\pi}{۲}<x<۲\pi \Rightarrow y = -۱ \quad x = \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow y = -۱$$

۶۱۳ -(۱)

$$\begin{bmatrix} -۳ & ۰ & ۱ \\ ۳ & b & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -۳+a \\ ۳+۲b+a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a = ۴ \text{ و } b = -۳ \Rightarrow a+b = ۱$$

۶۱۴ -(۱) در واقع مسئله مشابه آن است که ۸ گلدان در یک ردیف قرار گیرند و این کار به $۸!$ یا ۴۰۳۲۰ حالت میسر است.

۶۱۵ -(۳) برای رقم صدگان سه عدد ۱ و ۲ و ۳ و برای رقم دهگان ۴ عدد باقیمانده و برای رقم یکان سه عدد دیگر را می‌توان انتخاب کرد و مجموعاً ۳×۴×۳ یا ۳۶ حالت موجود است.

۶۱۶ -(۴) نقطهٔ میانی به طول $\frac{(-۲/۳)+(۵/۶)}{۲}$ یا $\frac{۱}{۱۲}$ است.

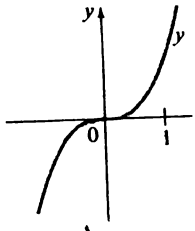
۶۱۷ -(۴) ابتدا قرار دهید $h(x) = ۳f(x) = ۶x-۳$ آنگاه داریم:

$$g(x) = \big((f+۲f)o\,f\big)(x) = (۳fo\,f)(x) = (\,ho\,f)(x) =$$

$$h\big(f(x)\big) = h(۲x-۱) = ۶(۲x-۱)-۳ = ۱۲x-۹$$

روش دوم: برای $x = ۱$ ، $f(۱) = ۱$ و $g(۱) = ۳f(f(۱)) = ۳$ در بین گزینه ها فقط گزینهٔ ۴ ، $g(۱) = ۳$ می‌باشد.

۶۱۸ -(۲) نمودار $y = x|x|$ بصورت مقابل است و از روی نمودار به سادگی دیده می‌شود که این نمودار یک به یک است.



روش دوم: تابع $y = |x|$ نه صعودی است نه نزولی پس $y = \frac{۱}{|x|}$ نیز چنین است و برای گزینهٔ ۳ چون $f'(x) = -\frac{۱}{x^۲}$ پس تابع روی دامنه نزولی است و فقط گزینهٔ ۲ می‌تواند درست باشد.

روش سوم: اگر $x_۱<x_۲$ سه حالت $۰ \le x_۱<x_۲$ و $x_۱<۰<x_۲$ و $x_۱<x_۲\le ۰$ موجود است که در هر سه حالت می‌توان $x_۱|x_۱| < x_۲|x_۲|$ یا $f(x_۱)<f(x_۲)$ را نتیجه گرفت.

۶۱۹ -(۲)

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \frac{۲}{۲+۲} - \frac{۲}{۲+۲} = ۰$$

روش دوم: تابع f روی R پیوسته است و اختلاف حد راست و چپش در هر نقطه‌ای برابر صفر است.

۶۲۰-(۴) اگر $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ آنگاه $f(x) = -\frac{۱}{۳}x^{-۲/۳}$ و طبق تعریف داریم :

$$\lim_{h\to ۰}\frac{-\sqrt[۳]{۸+h}+۲}{h} = f'(۸) = -\frac{۱}{۳}۸^{-۲/۳} = -\frac{۱}{۱۲}$$

روش دوم : با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم :

$$\lim_{h\to ۰}\frac{-\sqrt[۳]{۸+h}+۲}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{(-۱/۳)(۸+h)^{-۲/۳}}{۱} = -\frac{۱}{۳}(۸^{-۲/۳}) = -\frac{۱}{۱۲}$$

روش سوم : عامل صفر کننده را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم داریم :

$$\lim_{h\to ۰}\frac{-\sqrt[۳]{۸+h}+۲}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{(۲-\sqrt[۳]{۸+h})(۴+۲\sqrt[۳]{۸+h}+\sqrt[۳]{(۸+h)^۲})}{h(۴+۲\sqrt[۳]{۸+h}+\sqrt[۳]{(۸+h)^۲})} =$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{۸-(۸+h)}{h(۴+۲\sqrt[۳]{۸+h}+\sqrt[۳]{(۸+h)^۲})} = \frac{-۱}{۴+۲\sqrt[۳]{۸}+\sqrt[۳]{۸^۲}} = -\frac{۱}{۱۲}$$

۶۲۱-(۲) $(gof)'(۴) = g'(f(۴)).f'(۴) = g'(\sqrt{۴}).\frac{۱}{۲\sqrt{۴}} = -۳\times\frac{۱}{۴}$

روش دوم : می‌توانید در حالت خاص $g(x)$ را برابر $-۳x$ در نظر گرفته و مسئله را حل کنید.

۶۲۲-(۴) $v=\frac{۴}{۳}\pi R^۳ \Rightarrow v' = ۴\pi R^۲ \Rightarrow v'(R=۵) = ۴\pi(۵)^۲ = ۱۰۰\pi$

روش دوم : مساحت کره برابر $۴\pi R^۲$ است و آهنگ آنی تغییر حجم در شعاع $R=۵$ برابر مساحت کره بازای $R=۵$ است.

۶۲۳-(۳) تابع f همواره صعودی است پس f' همواره بزرگتر یا مساوی صفر است و فقط گزینهٔ ۳ چنین است.

۶۲۴-(۳) $f(x) = Arccot\frac{۱}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{(۱/x)'}{۱+(۱/x^۲)} = \frac{۱}{۱+x^۲} \Rightarrow f'(۱) = \frac{۱}{۲}$

روش دوم : $f(x)=Arccot\frac{۱}{x}=Arctanx \Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۱+x^۲} \Rightarrow f'(۱)=\frac{۱}{۲}$

۶۲۵-(۱) در اینجا مقطع هذلولی است و بنابراین صفحه Δ موازی محور مخروط دوار است .

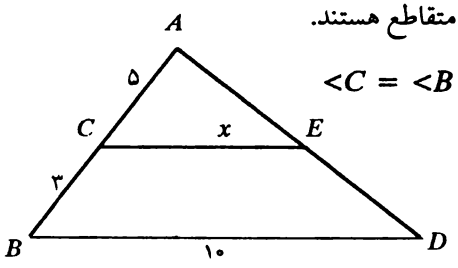
۶۲۶- (۴) $y^۲-۲y+۴x=۷ \Rightarrow (y-۱)^۲=-۴x+۷+۱=-۴(x-۲)$

بنابراین راس نقطه $O(۲,۱)$ است و $-۲p=-۴$ یا $\frac{p}{۲}=۱$ بنابراین خط هادی بصورت $x=۲+۱=۳$ است.

۶۲۷- (۱) $\int_{۰}^{۲}\frac{dx}{۴+x^۲}=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲}\frac{(۱/۲)dx}{۱+(x/۲)^۲}=\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}\frac{x}{۲}\Big]_{۰}^{۲}$

$$=\frac{۱}{۲}\tan\frac{۲}{۲}-\frac{۱}{۲}\tan۰=\frac{۱}{۲}\tan۱=\frac{۱}{۲}\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۸}$$

۶۲۸- (۲) با توجه به شرایط مسئله چهار ضلعی ذوزنقهٔ متساوی الساقین است و دو قطر در O با یک نسبت متقاطع هستند.



۶۲۹- (۲) $\angle C=\angle B \Rightarrow CE\|BD \Rightarrow$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{x}{۱۰}\Rightarrow$$

$$\frac{۵}{۸}=\frac{x}{۱۰}\Rightarrow$$

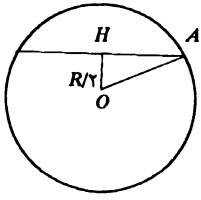
$$۸x=۵۰\Rightarrow x=\frac{۵۰}{۸}=۶/۲۵$$

۶۳۰- (۳) $m_a=\frac{۶}{۲}=۳$ و $m_a^۲+m_b^۲+m_c^۲=\frac{۳}{۴}(a^۲+b^۲+c^۲)\Rightarrow$

$$۹+m_b^۲+m_c^۲=\frac{۳}{۴}(۳۶+۳۶)\Rightarrow m_b^۲+m_c^۲=۵۴-۹=۴۵$$

۶۳۱- (۱) مقطع دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۶^۲-۴^۲}$ یا $\sqrt{۲۰}$ است و مساحت مقطع برابر $\pi(\sqrt{۲۰})^۲$ یا ۲۰π است.

۶۳۲- (۲) در مثلث OAH داریم:



$$AH=\sqrt{OA^۲-OH^۲}=$$

$$R^۲-\frac{R^۲}{۴}=\sqrt{\frac{۳R^۲}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}R\Rightarrow$$

طول وتر $=۲AH=۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲}R)=\sqrt{۳}R$

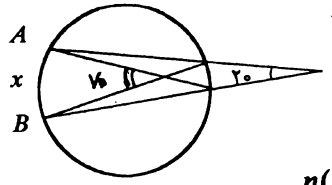
۶۳۳-(۳) $CA||ON \Rightarrow <ACI=<NOI=۷۰ \Rightarrow$

$\overset{\frown}{ANI} = ۱۴۰$ و $\overset{\frown}{NI}=۷۰$

$\overset{\frown}{AN}=۷۰ \Rightarrow <ACN=۳۵ \Rightarrow <ACN=<CNO=۳۵$

۶۳۴-(۱) $\Delta AOT: R^۲ = OA^۲ - AT^۲ \Rightarrow R^۲=۲۵-۱۶=۹ \Rightarrow R=۳$

۶۳۵-(۳) $\overset{\frown}{AB}=x, \overset{\frown}{CD}=y \Rightarrow$



$$\begin{cases} x+y=۱۴۰ \\ x-y=۴۰ \end{cases} \Rightarrow x=۹۰$$

۶۳۶-(۴) با توجه به فرمول $۱^۳+۲^۳+...+n^۳=\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲$ داریم:

$$۱^۳+۲^۳+...+(۲۱)^۳=\left(\frac{۲۱\times۲۲}{۲}\right)^۲=۵۳۳۶۱$$

۶۳۷-(۴) در روش استقراء و تعمیم یافته شروع استقراء می‌تواند عدد طبیعی مشخص باشد.

۶۳۸-(۱) توجه کنید که هر دوی $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ غیر صفرند و حاصلضرب آنها صفر نیست.

۶۳۹-(۴) چون B، C، D و E افرازی برای A هستند داریم:

$$n(A)=n(B)+n(C)+n(D)+n(E) \Rightarrow$$

$$۲۵=۳+۴+۷+N(E) \Rightarrow N(E)=۱۱$$

۶۴۰-(۲) احتمال مورد نظر برای $۲n$ سکه برابر $\frac{\binom{۲n}{n}}{۲^{۲n}}$ است و اگر n افزایش یابد عبارت اخیر کاهش می‌یابد.

روش دوم: اگر $n=۱$ آنگاه احتمال آنکه «پ» ها با تعداد «ر» ها برابر باشد $\frac{\binom{۲}{۱}}{۲^۲}$ یا $\frac{۱}{۲}$ است. و اگر $n=۲$ آنگاه این احتمال برابر $\frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۳}$ یا $\frac{۶}{۸}$ یا $\frac{۳}{۴}$ است و

چون $\frac{۳}{۴} > \frac{۱}{۲}$ احتمال آنکه تعداد « پ » ها و « ر » ها برابر باشند با افزایش n کاهش می‌یابد.

۶۴۱-(۳) دو پیشامد مستقلند بنابراین $P(A'\cap B') = P(A')\times P(B')$

$= (۱-۰/۴)(۱-۰/۸) = ۰/۶\times ۰/۲ = ۰/۱۲$

روش دوم:

$P(A'\cap B') = ۱-P(A\cup B) = ۱-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$

$= ۱-P(A)-P(B)+P(A)P(B) = ۱-۰/۴-۰/۸+۰/۳۲ = ۰/۱۲$

۶۴۲-(۲) $\frac{۵+۵i}{۲-۴i} + \frac{۵}{۱-۳i} = \frac{۵+۵i}{۲-۴i}\cdot\frac{۲+۴i}{۲+۴i} + \frac{۵}{۱-۳i}\cdot\frac{۱+۳i}{۱+۳i} =$

$= \frac{-۱۰+۳۰i}{۴+۱۶} + \frac{۵+۱۵i}{۱+۹} = \frac{۶۰i}{۲۰} = ۳i$

۶۴۳-(۳) تساوی $d^۲-c^۲=۷۷$ را بصورت $(c+d)(d-c)=۷۷$ بنویسید.

چون طبق فرض $c-d=-۷$ بنابراین $(c+d)(-۷)=۷۷$ یا $c+d=۱۱$ و در نتیجه $(c+d)^۲=۱۲۱$

۶۴۴-(۳) $۱/\overline{۳۹} = \frac{p}{q} \Rightarrow ۱+\frac{۳۹}{۹۹} = \frac{p}{q} \Rightarrow ۱+\frac{۱۳}{۳۳} = \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{۴۶}{۳۳} = \frac{p}{q}$

q = مجموع ارقام $۳۳ = ۳+۳ = ۶$

۶۴۵-(۲) خط عمود بر خط به معادلهٔ $۲y+x=۰$ دارای شیب $\frac{-۱}{-۱/۲}$ یا ۲ می‌باشد و معادلهٔ آن بصورت $y-۲=۲(x+۱)$ یا $y=۲x+۴$ است اگر y را برابر ۰ قرار دهیم $x=-۲$ حاصل می‌شود.

۶۴۶-(۲) چون مثلث قائم الزاویه است با توجه به فرمول فیثاغورث داریم:

$(۲x+۱)^۲ = x^۲+(۲x-۱)^۲ \Rightarrow x^۲-۸x=۰ \Rightarrow x=۰$ یا $x=۸$

جواب $x=۰$ غیر قابل قبول است و اضلاع ۸ و ۱۵ و ۱۷ هستند.

۶۴۷ -(۳) دو عدد را x، $x+۱$ در نظر بگیرید. حاصل می‌شود:

$$x(x+۱) = ۵x+۳۲ \Rightarrow x^۲-۴x-۳۲=۰ \Rightarrow x=۸ ،\ x=-۴$$

فقط $x=۸$ قابل قبول است و دو عدد ۸ و ۹ می‌باشند که مجموع آنها ۱۷ است.

۶۴۸ -(۱)
$$f(g(x))=۰ \Rightarrow f(x^۲-۱)=۰ \Rightarrow ۲(x^۲-۱)-۲=۰ \Rightarrow$$
$$۲x^۲-۴=۰ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

۶۴۹ -(۴)
$$log_{۸}\frac{\sqrt{۲}}{۴} = log_{۸}\frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = log_{۸}\frac{۱}{\sqrt{۸}} = log_{۸}۸^{-۱/۲} = -\frac{۱}{۲}$$

۶۵۰ -(۴)
$$s_n=\frac{n(۹n-۵)}{۱۲} = \frac{۱}{۲}n\left[\frac{۹}{۶}n-\frac{۵}{۶}\right] =$$
$$\frac{۱}{۲}n\left[\frac{۳}{۲}(n-۱)+\frac{۴}{۶}\right] \Rightarrow \frac{۳}{۲} = \text{قدر نسبت}$$

۶۵۱ -(۳) کمان مقابل به زاویهٔ ۶۰° درجه $\frac{۶۰}{۳۶۰}$ یا $\frac{۱}{۶}$ کلیهٔ داده ها است. چون تعداد دانش آموزان ۸۴ است بنابراین $\frac{x}{۸۴}$ داده ها برابر $\frac{۱}{۶}$ در نتیجه x برابر $\frac{۸۴}{۶}$ یا ۱۴ است.

۶۵۲ -(۱)
$$\sqrt{۲}\left[sin(x+\frac{\pi}{۴})+cos(x+\frac{\pi}{۴})\right] = \sqrt{۲}\left[\sqrt{۲}sin(x+\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴})\right]$$
$$= ۲sin(x+\frac{\pi}{۲}) = ۲cosx$$

روش دوم: به ازای $x = -\frac{\pi}{۴}$ عبارت داده شده برابر $\sqrt{۲}$ است و فقط گزینهٔ ۱ نیز $\sqrt{۲}$ خواهد بود.

۶۵۳ -(۴) کتابهای ریاضی به تعداد !۳ حالت با هم قرار می‌گیرند و چون این سه کتاب باید کنار هم باشند بنابراین با چهار کتاب ادبی مجموعاً ۵ کتاب خواهند بود و به !۵ حالت کنار هم قرار می‌گیرند و !۵×!۳ یا ۷۲۰ حالت وجود دارد.

۶۵۴ -(۱) از آنجاکه $|A| = ۳\times۲-۵\times۱ = ۱$ در نتیجه داریم :

$$|(A^{-۱})^{۲}| = (|A^{-۱}|)^{۲} = (\frac{۱}{|A|})^{۲} = ۱$$

۶۵۵ -(۱) ریشه های معادلهٔ $f(x)=۰$ همواره n واحد بیشتر از ریشه های معادلهٔ $f(x-n)=۰$ است بنابراین معادلهٔ $۲x^{۲}+۳x-k=۰$ هم ارز معادلهٔ $۲(x+۲)^{۲}-۵(x+۲)+۱=۰$ یا $۲x^{۲}+۳x-۱=۰$ است و بنابراین $k=۱$ حاصل می‌شود.

روش دوم : می‌توانید ریشه های معادلهٔ $۲x^{۲}-۵x+۱=۰$ را یافته و معادله‌ای که ریشه هایش دو واحد کمتر از ریشه های معادله است یافته و معادلهٔ حاصل را هم ارز معادلهٔ $۲x^{۲}-۳x-k=۰$ قرار دهید.

۶۵۶ -(۴) با توجه به نمودار چون $f(۳)=۰$ در نتیجه داریم :

$$\frac{۳^{۲}-۵\times۳+b}{a-۳} = ۰ \Rightarrow ۹-۱۵+b = ۰ \Rightarrow b=۶$$

از طرفی معادله به صورت یک خط راست در آمده بنابراین $x = a$ که ریشهٔ مخرج کسر است باید ریشهٔ صورت کسر نیز باشد بنابراین داریم :

$$a^{۲}-۵a+b=۰ \Rightarrow a^{۲}-۵a+۶=۰ \Rightarrow a = ۳ \text{ یا } a = ۲$$

جواب $a = ۳$ غیر قابل قبول است

۶۵۷ -(۴) با استفاده از هم ارزی های $tan۳x = ۳x$ و $۱-cos۴x = \frac{(۴x^{۲})}{۲}$

$$\lim_{x\to۰^{+}} \frac{tan۳x\sqrt{۱-cos۴x}}{x^{۲}+x^{۳}} = \lim_{x\to۰^{+}} \frac{۳x\sqrt{(۴x)^{۲}/۲}}{x^{۲}(۱+x)}$$

$$\lim_{x\to۰^{+}} \frac{۳x(۲\sqrt{۲}\,x)}{x^{۲}(۱+x)} = \lim_{x\to۰^{+}} \frac{۶\sqrt{۲}}{۱+x} = ۶\sqrt{۲}$$

روش دوم : می‌توانید دوبار از قاعدهٔ هوپیتال استفاده نمایید.

۶۵۸ -(۲) اگر معادلهٔ $y^۲=ay+۲x+۵$ را بصورت $(y-\frac{a}{۲})^۲=۲x+۵+\frac{a^۲}{۴}$ یا $(y-\frac{a}{۲})^۲=۲(x+\frac{۵}{۲}+\frac{a^۲}{۸})$ بنویسید خط هادی بصورت زیر است :

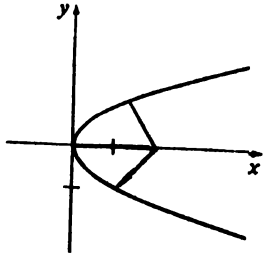
$$x=\frac{-۵}{۲}-\frac{a^۲}{۸}-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{-۷}{۲}=-\frac{a^۲}{۸}-۳\Rightarrow a=\pm۲$$

۶۵۹ -(۳) اگر بصورت ضمنی از معادلهٔ $y^۲=۴x$ مشتق بگیریم تساوی $۲yy'=۴$ یا $y'=\frac{۲}{y}$ حاصل می‌شود. بنابراین در نقطهٔ به عرض b روی منحنی شیب مماس $\frac{۲}{b}$ است و در نتیجه شیب قائم بر منحنی $-\frac{b}{۲}$ است پس معادلهٔ قائم بر منحنی در نقطهٔ $(\frac{b^۲}{۴},b)$ بصورت $y-b=-\frac{b}{۲}(x-\frac{b^۲}{۴})$ است.و چون قائم از نقطهٔ $A(۳,۰)$ می‌گذرد داریم:

$$۰-b=-\frac{b}{۲}(۳-\frac{b^۲}{۴})\Rightarrow b=۰\text{ یا }۲=۳-\frac{b^۲}{۲}\Rightarrow b=۰\text{ یا }b=\pm۲$$

سه خط گذرنده از A با شیبهای ۱ و ۱- و ۰ جواب مسأله هستند.

روش دوم : مطابق شکل زیر یکی از قائم ها خط $y=۰$ است. خط قائم بر منحنی را در نیمهٔ بالایی می‌یابیم و بعلت تقارن نسبت به محور xها قائم های بالایی در پایین نیز وجود دارد. معادلهٔ نیمهٔ بالایی $y=۲\sqrt{x}$ است و شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $(a,\sqrt{a})$ است و شیب خط قائم بر منحنی در نقطهٔ $(a,۲\sqrt{a})$ برابر $\frac{۱}{\sqrt{a}}$ برابر $-\sqrt{a}$ است. معادلهٔ قائم بر منحنی بصورت $y-۲a=-\sqrt{a}(x-a)$ است. چون خط از نقطهٔ $(۰,۳)$ می‌گذرد خواهیم داشت :



$-۲a = -\sqrt{a}\,(۳ - a) \Rightarrow ۲\sqrt{a} = ۳ - a \Rightarrow \sqrt{a} = ۱ \Rightarrow a = ۱$

در نتیجه مجموعاً سه قائم وجود دارد.

۶۶۰ -(۱) ابتدا نقطهٔ عطف تابع را می‌یابیم:

$y' = -(۱ + cot^{۲}x) \Rightarrow y'' = -[۰ - ۲\,cotx\,(۱ + cot^{۲}x)] = ۰ \Rightarrow$

$x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow y'(\frac{\pi}{۲}) =$ شیب مماس $= -۱$

۶۶۱ -(۴) تابع $y = -x|x|$ همواره نزولی است و ماکزیمم مقدار آن بر $[-۲, ۱]$ در نقطهٔ ابتدا و برابر ۴ می‌باشد.

۶۶۲ -(۱) مجموعهٔ سایه زده شده نقاط خارج A یا A' است.

۶۶۳ -(۲) رابطهٔ عمود بودن برای خطوط واقع در یک صفحه خاصیت تقارنی را دارد.

۶۶۴ -(۳) باید $P(۱) + p(۲) + p(۳) + p(۴) = ۱$، در نتیجه

$P(۱) + p(۱)/۲ + p(۱)/۳ + p(۱)/۴ = ۱ \Rightarrow p(۱) = \frac{۱۲}{۲۵}$

۶۶۵ -(۱) احتمال آنکه این خانواده حداکثر چهار دختر داشته باشد، برابر است با یک منهای احتمال آنکه همه فرزندان دختر باشند یعنی $۱ - \frac{۱}{۳۲}$ یا $\frac{۳۱}{۳۲}$.

روش دوم: احتمال مورد نظر برابر است با

$P = P(\text{همگی پسر}) + P(\text{یک دختر}) + P(\text{دو دختر}) + P(\text{سه دختر}) + P(\text{چهار دختر}) =$

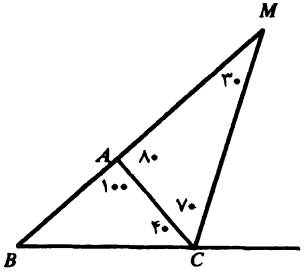
$$\frac{۱}{۳۲} + \binom{۵}{۱}(\frac{۱}{۲})^{۴}(۱-\frac{۱}{۲})^{۱} + \binom{۵}{۲}(\frac{۱}{۲})^{۳}(۱-\frac{۱}{۲})^{۲} +$$

$$\binom{۵}{۳}(\frac{۱}{۲})^{۲}(۱-\frac{۱}{۲})^{۳} + \binom{۵}{۴}(\frac{۱}{۲})^{۱}(۱-\frac{۱}{۲})^{۴} = \frac{۳۱}{۳۲}$$

۶۶۶- (۱) $P=\frac{\text{مساحت مربع}}{\text{مساحت دایره}}=\frac{(R\sqrt{۲})^۲}{\pi R^۲}=\frac{۲}{\pi}$

۶۶۷- (۳) یک n ضلعی محدب حداکثر ۳ زاویهٔ حاده دارد. زیرا اگر چهار زاویهٔ حاده داشته باشد مجموع زوایای خارجی‌اش از ۳۶۰ بیشتر خواهد بود.

۶۶۸- (۳) چون زاویهٔ A برابر ۱۰۰ درجه است و دو زاویهٔ دیگر ۴۰ درجه هستند و زاویهٔ خارجی C برابر ۴۰-۱۸۰ یا ۱۴۰ می‌باشد در نتیجه زاویهٔ خواسته شده برابر ۳۰=۸۰-۷۰-۱۸۰ می‌باشد.



۶۶۹- (۲) دو مثلث متشابهند زیرا اضلاع متناظر موازی هستند اگر h ارتفاع مثلث بزرگ باشد داریم

$$\frac{۴}{h}=\frac{۷}{۱۷/۵}\Rightarrow h=۱۰\Rightarrow s=۱۷/۵\times\frac{۱۰}{۲}=۸۷/۵$$

۶۷۰- (۴) $PA^۲=PO^۲-OA^۲=۲۵-۱=۲۴\Rightarrow PA=\sqrt{۲۴}=۲\sqrt{۶}$

۶۷۱- (۳) $<ACB=۹۰^\circ\Rightarrow cosx=\frac{AC}{AB}=\frac{a\sqrt{۲}}{a\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۶}}{۳}\Rightarrow x=Arccos\frac{\sqrt{۶}}{۳}$

۶۷۲- (۴) حجم کره = $\frac{۴}{۳}\pi R^۳=\frac{۱}{۳}\pi R^۲h\Rightarrow h=۴R$ ← حجم مخروط

۶۷۳- (۲) ابتدا توجه کنید که $f(۱)=۱$ و وقتی $x\to ۱^+$ عبارت $\frac{x-۱}{۲}$ از طریق مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند و $\frac{x+۱}{۲}$ از طریق مقادیر بزرگتر از ۱ به سمت ۱ میل می‌کنند در نتیجه :

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\left([\frac{x+۱}{۲}]+[\frac{x-۱}{۲}]\right)x=(۱+۰)\times ۱=۱=f(۱)$$

تابع در $x=۱$ از راست پیوسته است. همینطور وقتی $x\to ۱^-$ عبارت $\frac{x-۱}{۲}$ از

طریق مقادیر منفی به صفر میل می‌کند و $\frac{x+1}{2}$ نیز از طریق مقادیر کمتر از ۱ به یک نزدیک می‌شود بنابراین :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left([\frac{x+1}{2}] + [\frac{x-1}{2}] \right) x = (0+(-1))\times 1 = -1$$

چون حد چپ برابر مقدار تابع نیست تابع از چپ ناپیوسته است.

۶۷۴ -(۱) با تقسیم صورت کسر به مخرج آن نتیجه می‌شود :

$$y = \sqrt{\frac{x^3+x^2}{x-2}} = \sqrt{x^2+3x+\frac{R}{x-2}}$$

هنگامی که $x\to\pm\infty$ عبارت $\sqrt{x^2+3x+\frac{R}{x-2}}$ با $|x+\frac{3}{2}|$ هم ارز است و $y = \pm|x+\frac{3}{2}|$ مجانب های منحنی هستند و $y = -x-\frac{3}{2}$ همان مجانب $y = -x+a$ است و بنابراین $a = -\frac{3}{2}$.

۶۷۵ -(۴) چون f در R مشتق پذیر است پس روی R پیوسته نیز است بنابراین :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} (ax+5) = \lim_{x\to 1^-} x^2 - a =$$

$$a+5 = 1-a \Rightarrow a = -2$$

از طرفی مشتق چپ و راست تابع در $x = 1$ باید برابر باشند در نتیجه :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{ax+5-(a+5)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-a-(a+5)}{x-1} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{ax-a}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2a-5}{x-1} = a = 2$$

بنابراین همزمان باید $a = -2$ و $a = 2$ باشد که امکان ندارد.

روش دوم : ضابطهٔ مشتق تابع برای $x\neq 1$ بصورت $f(x) = \begin{cases} a & x>1 \\ 3x & x<1 \end{cases}$ است.چون تابع در $x = 1$ نیز مشتق پذیر است باید مشتق چپ و راست در

$x=۱$ برابر باشند بنابراین $a = ۲\times۱ = ۲$. از شرط پیوستگی نیز مطابق روش قبل $a=-۲$ حاصل می‌شود.

۶۷۶-(۱) محل تقاطع نمودارهای $f(x)$, $f^{-۱}(x)$ روی خط $y = x$ واقع است از تساوی $f(x) = x$ معادله $x^۳-۳x=x$ حاصل می‌شود که جوابهای ±۲ و ۰ را در بردارد و فقط $x = ۲$ قابل قبول است چون $x>۱$است، در نتیجه خواهیم داشت :

$$(f^{-۱})'(۲) = \frac{۱}{f'(۲)} = \frac{۱}{۳(۲)^۲-۳} = \frac{۱}{۹}$$

۶۷۷-(۲)

$$\frac{sin۸۰-sin۴۰}{cos۸۰} = \frac{۲sin۲۰cos۶۰}{cos۸۰} = \frac{sin۲۰}{cos۸۰}$$

$$\frac{۲sin۱۰cos۱۰}{sin۱۰} = ۲cos۱۰$$

۶۷۸-(۳) تساوی $\lim \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = -\frac{۲}{۳}$ بصورت $f'(۲)=-\frac{۲}{۳}$

است با فرض $h(x) = f(\sqrt{۱-۳x})$ داریم:

$$h'(x) = \frac{-۳}{۲\sqrt{۱-۳x}} f'(\sqrt{۱-۳x}) \Rightarrow h'(-۱) = \frac{-۳}{۲\sqrt{۱-۳(-۱)}} f'(\sqrt{۱+۳(-۱)})$$

$$= -\frac{۳}{۴} \times -\frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۲}$$

۶۷۹-(۲) باید معادلهٔ $f(x) = a$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد در نتیجه :

$$cos^۲x + sinx = a \Rightarrow -sin^۲x + sinx + ۱ - a = ۰ \Rightarrow$$

$$\Delta = ۱-۴\times(-۱)\times(۱-a) = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰ \Rightarrow ۱-۴\times(-۱)\times(۱-a) = ۰$$

$$\Rightarrow ۱+۴(۱-a) = ۰ \Rightarrow a = \frac{۵}{۴}$$

۶۸۰-(۴) با توجه به روابط $sinx + cosx = \sqrt{۲}\,cos(x-\frac{\pi}{۴})$ و $sin۲x = ۲sinxcosx = ۲cos^۲(x-\frac{\pi}{۴})-۱$ داریم :

$$۳\sqrt{۲}\,(\sin x+\cos x)+\sin ۲x+۵=۰ \Rightarrow$$

$$۳\sqrt{۲}\,\left(\sqrt{۲}\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)\right)+۲\cos^{۲}\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)-۱+۵=۰\Rightarrow$$

$$۲\cos^{۲}\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)+۶\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)+۴=۰$$

که این معادلهٔ درجه دوم دو ریشه دارد :

$\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)=۱$ که قابل قبول است و دیگری $\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)=۲$ که قابل قبول نیست . بنابراین :

$$x-\frac{\pi}{۴}=(۲k'+۱)\pi \Rightarrow x=۲k'\pi+\frac{۵\pi}{۴}=۲k\pi-\frac{۳\pi}{۴}$$

روش دوم : می‌توان جوابهای داده شده را در معادله قرار داد.

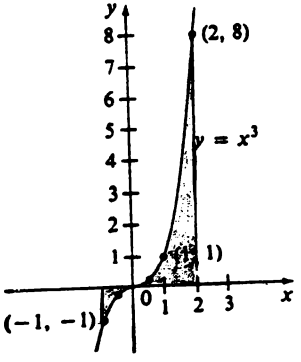
۶۸۱ -(۲) با توجه به هم ارزی های $\sin x-x\approx\frac{x^{۳}}{۳!}$ و $\sin x\approx x$ داریم :

$$\lim_{x\to۰}\frac{۱}{x}-\frac{۱}{\sin x}=\lim_{x\to۰}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to۰}\frac{(x^{۳}/۶)}{x^{۲}}=\frac{۰}{۶}=۰$$

با دوبار استفاده از قاعدهٔ هوپیتال حد خواسته شده برابر است با :

$$\lim_{x\to۰}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to۰}\frac{\cos x-۱}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to۰}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x+x\sin x}=۰$$

۶۸۲ -(۱) مطابق شکل زیر داریم



$$S=\left|\int_{-۱}^{۰}x^{۳}\,dx\right|+\left|\int_{۰}^{۲}x^{۳}\,dx\right|=$$

$$\left|\frac{x^{۴}}{۴}\right]_{-۱}^{۰}\Big|+\left|\frac{x^{۴}}{۴}\right]_{۰}^{۲}\Big|$$

$$=\frac{۱}{۴}+۴=\frac{۱۷}{۴}$$

۶۸۳ -(۲) شرط وجود جواب بصورت $۵n-۱ \mid ۱۲$ یا $۵n-۱ \mid (۶۰ , ۸۴)$ است بنابراین :

$$۵n-۱ = ۱۲k \Rightarrow n = \frac{۱۲k+۱}{۵} = ۲k + \frac{۲k+۱}{۵}$$

چون n و $۲k$ صحیح هستند $\frac{۲k+۱}{۵}$ نیز باید صحیح باشد بنابراین :

$\frac{۲k+۱}{۵} = S \Rightarrow ۲k = ۵S-۱$ چون $۲k$ زوج است باید $۵S-۱$ نیز زوج باشد پس $S = ۲t+۱$ اکنون داریم :

$$n = ۲k + \frac{۲k+۱}{۵} = ۵S-۱+ S = ۶(۲t+۱) -۱ = ۱۲t+۵$$

به ازای $t = ۲$ مقدار $n = ۲۹$ حاصل می‌شود.

روش دوم : اگر به جای n مقادیر گزینه ها را جایگزین کنیم فقط به ازای $n = ۲۹$ رابطهٔ $۵n-۱ \mid ۱۲$ صحیح است .

۶۸۴ -(۴) چون $(۱۸ , ۱۲) = ۶$ بنابراین داریم :

$$۱۲a \equiv ۱۸b \ (\text{پیمانهٔ } ۹) \Rightarrow ۲a \equiv ۳b \ (\text{پیمانهٔ } ۳) \Rightarrow$$

$$۲a \equiv ۰ \ (\text{پیمانهٔ } ۳) \Rightarrow a \equiv ۰ \ (\text{پیمانهٔ } ۳)$$

۶۸۵ -(۳) در واقع باید $۲^{۲۶}$ را به پیمانهٔ ۴۳ بیابیم. داریم :

$$۲^۷ = ۱۲۸ \overset{۴۳}{\equiv} (-۱) \Rightarrow (۲^۷)^۳ \overset{۴۳}{\equiv} (-۱)^۳ \Rightarrow ۲^{۲۱} \overset{۴۳}{\equiv} -۱$$

$$۲^{۲۶} = ۲^{۲۱} \times ۲^۵ \overset{۴۳}{\equiv} (-۱) \times ۳۲ \Rightarrow ۲^{۲۶} \overset{۴۳}{\equiv} -۳۲ \overset{۴۳}{\equiv} ۱۱$$

۶۸۶ -(۱) اگر عدد اول روشده ۴ باشد عدد دوم می‌تواند ۱ یا ۲ یا ۳ باشد.احتمال وقوع این حالت $\frac{۳}{۶} \times \frac{۱}{۶}$ در حالت دوم اگر عدد اول ۵ باشد عدد دوم می‌تواند ۱ یا ۲ باشد و احتمال وقوع این حالت $\frac{۲}{۶} \times \frac{۱}{۶}$ است و در حالت سوم اگر عدد اول ۶ باشد عدد دوم می‌تواند ۱ باشد و احتمال وقوع این حالت $\frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۶}$

است و مجموع این احتمالات برابر است با :

$$P(A) = \frac{۳}{۶}\times\frac{۱}{۶} + \frac{۲}{۶}\times\frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۶}$$

۶۸۷ -(۴) چون $V_۱\times V_۲ = ۰$ بنابراین $V_۱$ و $V_۲$ الزاماً همجهت هستند.

۶۸۸ -(۳) معادلهٔ خط را بصورت $x+۱ = y-۱ = z = t$ نوشته صورت پارامتری $\begin{cases} x = t-۱ \\ y = t+۱ \\ z = t \end{cases}$ حاصل می‌شود. فاصلهٔ نقطهٔ $M(t-۱,t+۱,t)$ از مبداء برابر $\sqrt{(t-۱)^۲+(t+۱)^۲+t^۲}$ یا $\sqrt{۳t^۲+۲}$ است که کمترین مقدارش بازای ریشه‌مشتق زیر رادیکال حاصل می‌شود یعنی بازای $t=۰$ و این کمترین مقدار برابر $\sqrt{۱+۱} = \sqrt{۲}$ است.

روش دوم : اگر $\overrightarrow{OM}$ بردار واصل بین مبداء و نقطهٔ M باشد هنگامی $\overrightarrow{OM}$ کمترین مقدار است که بر بردار هادی خط عمود باشد. بنابراین :

$$\overrightarrow{OM} \perp (۱,۱,۱) \Rightarrow (t-۱,t+۱,t).(۱,۱,۱) = ۰ \Rightarrow t-۱+t+۱+t = ۰$$

$$\Rightarrow ۳t = ۰ \Rightarrow t = ۰$$

بازای $t=۰$ کمترین مقدار $\overrightarrow{OM}$ حاصل می‌شود که $OH = \sqrt{۲}$ است.

۶۸۹ -(۱) شرط عمود بودن بودن تساوی $aa' + bb' + cc' = ۰$ است و در نتیجه $۰ = ۱\times۲ + m\times۱ + ۲\times۱$ یا $m = -۴$ خواهد بود.

۶۹۰ -(۱) اگر از ۳- و ۲- بترتیب در ستون دوم و سطر دوم فاکتور بگیریم داریم :

$$\begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ -۲a_۲ & -۲b_۲ & -۲c_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{vmatrix} = (-۳) \begin{vmatrix} a_۱ & -۳b_۱ & c_۱ \\ -۲a_۲ & ۶b_۲ & -۲c_۲ \\ a_۳ & -۳b_۳ & c_۳ \end{vmatrix} =$$

$$=(-۳)(-۲)\begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{vmatrix}=(۶)(-۲)=-۱۲$$

روش دوم : می‌توانید دترمینانها را بسط دهید و به نتیجه برسید.این روش طولانی است.

روش سوم : می‌توانید در حالت خاص مسئله را حل کنید با در نظر گرفتن $a_۱=۲$ و $b_۲=c_۳=۱$ و $a_۲=a_۳=b_۳=b_۱=c_۱=c_۲=۰$ به نتیجه می‌رسید.

۶۹۱ -(۲)
$$BA=(A^T\,.\,B^T)^T=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

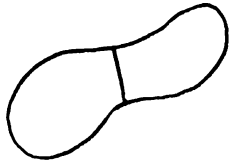
۶۹۲ -(۴) باید دترمینان سه بردار صفر نباشد داریم:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ m & -۱ & ۲ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{vmatrix}\neq ۰ \Rightarrow (-۱)+۲m-۲-[۱+۴+m]\neq ۰ \Rightarrow m\neq ۸$$

۶۹۳ -(۲)
$$Z=\left(\frac{۱+i}{۱-i}\right)^۳=\left(\frac{(۱+i)^۲}{۱+۱}\right)^۳=\frac{۱}{۸}(۱+۲i-۱)^۳=$$

$$\frac{۱}{۸}(۲i)^۳=\frac{۱}{۸}(۸i^۳)=i^۳=-i=cos\,\frac{۳\pi}{۲}+isin\,\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow\theta=\frac{۳\pi}{۲}$$

۶۹۴ -(۴) اگر یک قطر مجموعه را به دو مجموعهٔ محدب تقسیم کند ممکن است مجموعه محدب نباشد مطابق شکل مقابل



۶۹۵ -(۲) تبدیل انتقال تمام نقاط صفحه را جابجا می‌کند.

۶۹۶ -(۴) با استقراء می‌توان ثابت کرد که کران بالای دنباله ۲ است و دنباله صعودی می‌باشد زیرا

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n}=\frac{\sqrt{۲a_n}}{a_n}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{a_n}}>۱\Rightarrow a_{n+۱}>a_n\quad\forall\, n\in N$$

اکنون از طرفین رابطه $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ حد می‌گیریم با توجه به آنکه وقتی $n \to +\infty$ آنگاه $n+1 \to +\infty$ خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{2\lim_{n\to+\infty} a_n} \Rightarrow L = \sqrt{2L} \Rightarrow$$

$$L = 0 \text{ و } L = 2$$

$L = 0$ غیر قابل قبول است چون عناصر دنباله همگی بین ۱ و ۲ قرار دارند. توجه کنید که برای محاسبهٔ حد ابتدا لازم بود کراندار بودن و صعودی بودن دنباله را بررسی کنیم.

۶۹۷-(۳) برای $y = e^{-x}$ عبارت $y' = -e^{-x}$ همواره منفی است.

روش دوم: $a<b \Rightarrow -a>-b \Rightarrow e^{-a} > e^{-b} \Rightarrow y_1 > y_2$

توجه کنید که در گزینهٔ ۴ تابع در $x = -1$ ناپیوسته است. علی رغم آنکه

$y' = \frac{-1}{(x+1)^2}$ همواره منفی است ولی تابع روی R نزولی نمی‌باشد. $x \neq -1$

۶۹۸-(۲) $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{\tan x} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{1+\tan^2 x}.(1+\tan^2 x) = 1$

روش دوم: $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{1}{1+x^2}dx = Arctanx\Big]_0^{\tan x} = x \Rightarrow F'(x) = 1$

۶۹۹-(۴) $y = \tan(e^{\sin x}) \Rightarrow y' = (e^{\sin x})'\left(1+\tan^2 e^{\sin x}\right) =$

$$\Rightarrow y' = \cos x \cdot e^{\sin x}\left(1+\tan^2 e^{\sin x}\right)$$

$$x=0 \Rightarrow y' = 1+\tan^2 1$$

۷۰۰-(۴) با تغییر متغیر $x = t^2$ و تساوی $dx = 2tdt$ داریم:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int_0^1 \frac{tdt}{1+t} = 2\int_0^1 (1-\frac{1}{1+t})\,dt = 2t - 2\ln|1+t|\Big]_0^1$$

$$= 2-2\ln 2$$

۷۰۱- (۳) $F'(c) = \frac{F(۱)-F(۰)}{۱-۰} = \frac{۰-۰}{۱-۰} = ۰ \Rightarrow$

$$sinc + (c-۱)cosc = ۰ \Rightarrow tanc = ۱-c$$

۷۰۲- (۱) با فرض $U = lnx$ و $dv = dx$ دو تساوی $dv = dx$ و $v = x$ و $dv = \frac{۱}{x}dx$

حاصل می‌شود از فرمول انتگرال جزء به جزء داریم:

$$\int_۱^e lnx\,dx = x\,lnx\Big]_۱^e - \int_۱^e x\frac{۱}{x}dx = xlnx - x\Big]_۱^e = e - e - (۰-۱) = ۱$$

۷۰۳- (۲) اگر گراف مرتبه ۸ کامل باشد تعداد ۲۸ یال خواهد داشت در نتیجه $p(G) = ۸$ و $q(G) = ۲۷$ در این گراف چون یک یال کم است پس ۲ رأس آن ماکزیمم نبوده و ۶ رأس آن از درجه ۷ است.

۷۰۴- (۳) $\binom{۵+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۷}{۲} = ۲۱$

۷۰۵- (۱) $\sum_{x=۱}^{n} P(x) = ۱ \Rightarrow \sum_{x=۱}^{n} \frac{۱}{n^۲}(۲x+a) = ۱$

$$\Rightarrow \frac{۱}{n^۲}\left[۲\sum_{x=۱}^{n} x + \sum_{x=۱}^{n} a\right] = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{n^۲}\left[۲\,\frac{n(n+۱)}{۲} + na\right] = ۱ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n+۱+a = n \Rightarrow a = -۱$$

۷۰۶- (۳) اگر هستهٔ یک تبدیل بیش از یک عضو داشته باشد آن تبدیل یک به یک نیست.

۷۰۷- (۱) در سه گزینهٔ ۲ و ۳ و ۴ نگاشت خطی الزاماً وارون پذیر است و فقط در حالتی که تصویر f یک زیر فضای R^n باشد ممکن است که نگاشت وارون پذیر نباشد.

سوالات کنکور سراسری سال ۷۸-۷۷ نظام جدید

۱- کدام گزاره برای تعریف همسایگی محذوف متقارن a نادرست است؟

۱) $\{x\in R : |x-a| <\varepsilon\}$ ۲) $\{x\in R : 0<|x-a| <\varepsilon\}$

۳) $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)-\{a\}$ ۴) $(a-\varepsilon,a)\cup(a,a+\varepsilon)$

۲- جملات دنبالهٔ $\{\frac{2n^2-32}{n^2-41}\}$ برای مقادیر $n>71$ در کدام همسایگی قرار می‌گیرند؟

۱) $(1/99, 2/01)$ ۲) $(1/995, 2/005)$

۳) $(2, 2/01)$ ۴) $(2, 2/005)$

۳- کدام توصیف در دنباله‌ها درست است؟

۱) هر دنباله صعودی واگر است ۲) هر دنباله غیریکنوا واگرا است

۳) هر دنباله کراندار همگرا است ۴) هر دنباله همگرا کراندار است.

۴- مقدار سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k-2^k}{10^k}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۵- در تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{4x^2-1}{2x-1} & x>1\\ 5x-2 & x\le 1\end{cases}$ اگر $0<|x-1|<\delta$ آنگاه فاصله $f(x)$

از عدد ۳ کمتر از ۰/۰۱ باشد بزرگترین مقدار δ کدام است؟

۱) ۰/۰۱ ۲) ۰/۰۰۲

۳) ۰/۰۰۳ ۴) ۰/۰۰۵

۶- یکی از جواب‌های معادله $x=\sqrt{۲}sinx$ در کدام فاصله است؟

۱) $(۰, \frac{\pi}{۶})$ ۲) $(\frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۲})$

۳) $(\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۳})$ ۴) $(\frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۴})$

۷- تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x-[x]+sin(\frac{\pi}{۲}[x])$; $۳\leq x\leq ۶$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸- اگر f تابعی پیوسته و $f(۱)=۴$ و $f'(۱)=۸$ آنگاه مشتق $\frac{۱}{f(x)}$ در $x=۱$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) -۲

۹- تابع با ضابطه: $f(x)=\begin{cases} ax+b & ; x<-۱ \\ x^۲+a & ; x\geq -۱ \end{cases}$ در R مشتق‌پذیر است، b کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) -۳

۱۰- اگر $x<۱$; $f(x)=x^۲-۲x+۲$ ضریب زاویه(شیب) خط قائم بر منحنی تابع $f^{-۱}(x)$ در نقطه تلاقی نمودار آن با محور xها کدام است؟

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

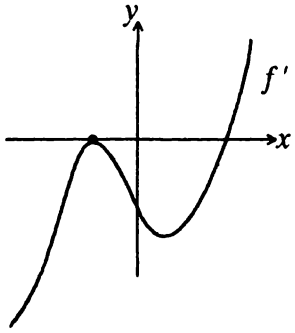
۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۱۱- بیشترین مقدار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x^۲-x+۱}{x^۲+x+۱}$; کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) ۳ ۴) ۴

۱۲- شکل مقابل نمودار مشتق تابع f است، منحنی تابع f از نظر ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی و نقطه عطف دارای کدام وضعیت است؟



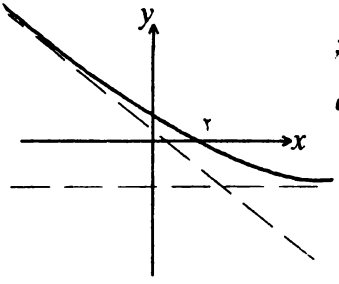
۱) می‌نیمم-دو نقطه عطف

۲) ماکزیمم-دو نقطه عطف

۳) می‌نیمم-یک نقطه عطف

۴) ماکزیمم-می‌نیمم-یک نقطه عطف

۱۳- شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه $f(x)=ax+\sqrt{x^2+bx+4}$ است، $a+b$ کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۱

۳) -۲ ۴) -۳

۱۴- دو منحنی به معادلات $y=x-\sqrt{x+3}$ و $y=\frac{ax+b}{x+1}$، در نقطه‌ای به طول ۱ مماس برهم‌اند، a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱۵- مقدار تقریبی $\sin 31^\circ$ با استفاده از دیفرانسیل کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{3}}{18})$ ۲) $\frac{1}{2}(1+\frac{\pi}{180})$

۳) $\frac{1}{2}(1-\frac{\sqrt{3}\pi}{18})$ ۴) $\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{3}\pi}{180})$

۱۶- عدد حقیقی C در قضیه مقدار میانگین برای انتگرال $\int_1^5 \frac{x^2-1}{x^2}dx$، کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{7}{3}$

۱۷- مقدار $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x tg^2 t dt}{x\sin x}$ (حد)، برابر کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۸- اگر $F(x)=\int_e^{e^x} t\ln t.dt$ ، اندازه مشتق مرتبه دوم تابع $F(x)$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $2e$ ۳) $2e^2$ ۴) $3e^2$

۱۹- مقدار $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{n+8i}$ برابر کدام است؟

۱) $\ln\sqrt{3}$ ۲) $\ln\frac{3}{2}$

۳) $\ln 3$ ۴) $\ln 9$

۲۰- اگر $\int \frac{2\sin^2 x}{1+\cos x} dx = f(x).\cos x + c$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $\cos x - 2$ ۲) $\sin x + 1$

۳) $1-\sin x$ ۴) $2-\cos x$

۲۱- قرینه بردار $a=j+3k$ نسبت به راستای بردار $b=i-k$ کدام است؟

۱) $-i+3k$ ۲) $-3i-j$

۳) $2i-j+k$ ۴) $3i+j$

۲۲- فاصله نقطه $(0,1,2)$ از خط به معادله $x=y=z$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

۲۳- صفحه عمودمنصف پاره‌خط واصل بین دو نقطه $(1,2,0)$ و $(-2,6,5)$، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۲/۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷/۵

۲۴- در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & m & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ به ازای کدام مجموعه مقادیر m حاصل دترمینان $|A^t.A|$ برابر صفر است؟

۱) R ۲) ϕ

۳) $\{۱,۲\}$ ۴) $\{۲,۳\}$

۲۵- اگر دترمینان $D=\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ a & b & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۱ \end{vmatrix}$، آنگاه دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ a & b & ۱ \\ ۲ & ۵ & -۱ \end{vmatrix}$ برابر کدام است؟

۱) $-D-۲$ ۲) $-D+۲$

۳) $D-۱$ ۴) $D+۱$

۲۶- به ازای کدام مقادیر a سه بردار $(۱,۰,۱)$ و $(۰,۱,۱)$ و $(a,-۱,۲)$ تشکیل یک پایه را می‌دهد؟

۱) $a\neq ۰$ ۲) $a\neq ۲$

۳) $a\neq ۱$ ۴) $a\neq ۳$

۲۷- بعد هسته نگاشت خطی $f:\ (x,y,z)\to(x-۲y+z,x+y-z)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۸- اگر یک تبدیل $f:\ R^۲\to R^۲$ با ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$، مستطیل $\begin{bmatrix} ۰ & ۴ & ۴ & ۰ \\ ۳ & ۳ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ را به متوازی‌الاضلاع تبدیل کند، مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۲

۳) ۴۸ ۴) ۵۴

۲۹- اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۴ \\ -۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$، عنصر واقع در سطر دوم و ستون اول ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۳۰- نگاشت خطی $f: R^۲ \to R^۲$ هر نقطه را به موازات خط به معادله $y=۲x$ بر روی خط به معادله $۲y+x=۰$ تصویر می‌کند، مقادیر ویژه آن کدام است؟

۱) $۰,-۱$ ۲) $۱,-۱$ ۳) $۰,۱$ ۴) $۲,۱$

۳۱- درجه رأس‌های گراف همبند G عبارتند از: «۱، ۲، ۲، ۲، ۳، ۴» به طوری که دو رأس با درجه‌های بزرگتر مجاور نیستند، تعداد دورها با طول ۳ در این گراف کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۲- گراف همبند G فاقد دور است، مجموع مرتبه و اندازه آن کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۳۳- در تقسیم عدد صحیح a بر عدد صحیح b خارج قسمت و باقیمانده مساوی q اند، اگر ۳ واحد از مقسوم‌علیه کم شود ۵ واحد به خارج قسمت اضافه شده و باقیمانده صفر شود مقادیر q کدام‌اند؟

۱) ۵ و ۸ ۲) ۴ و ۹ ۳) ۵ و ۱۰ ۴) ۸ و ۱۰

۳۴- اگر کوچکترین عضو مثبت مجموعه $\{ ma+nb: m,n \in Z \}$ برابر ۸ و $a+b=۱۰۴$ باشد بزرگترین مقدار برای کوچکترین مضرب مشترک دو عدد طبیعی a و b کدام است؟

۱) ۳۵۲ ۲) ۳۴۴ ۳) ۳۳۶ ۴) ۳۲۰

۳۵- دو عدد a و b نسبت به هم اول‌اند و $(a+b)^۲ \mid ۵۴$، کوچکترین مضرب مشترک ۳۶ و a کدام است؟

۱) $۴a$ ۲) $۶a$ ۳) $۱۸a$ ۴) $۳۶a$

۳۶- تعداد عضوهای مجموعه $\{n:۶۵ \mid ۲^n+۱\}$ از مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۳۷[1]- از رابطه: (پیمانه ۱۲) $۸a \equiv ۶۴$، کدام تساوی حاصل می‌شود؟

۱) $a+۱=۳k$ ۲) $a+۴=۱۲k$

۳) $a-۱=۳k$ ۴) $a-۸=۱۲k$

۳۸- اگر R یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه n عضوی A باشد، ماتریس صفر و یک M، متناظر با آن در کدام شرط صادق نیست؟

۱) $M^۲ \ll M$ ۲) $M=M^t$

۳) $I_n \ll M$ ۴) $M \wedge M^t \ll I_n$

۳۹- پنج مهره با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را در ظرفی ریخته‌ایم، سه مهره به تصادف از ظرف بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال مجموع شماره‌های آن سه مهره زوج است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۴

۴۰- به ازای کدام مقادیر a تابع $P(X=x)=ap(۱-۲p)^{(x-۵)}$; $x=۵,۶,۷,\ldots$ یک تابع احتمال است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱- در صورت سؤال ۳۷ اصلاح بعمل آمده

پاسخ تشریحی کنکور سراسری سال ۷۸-۷۷

۱-(۱) همسایگی محذوف متقارن برای a شامل a نمی‌باشد.

۲-(۱) با توجه به تعریف حد و اینکه حد دنباله برابر ۲ است باید εای را بیابیم که داشته‌باشیم

$$n>۷۱ \Rightarrow \left|\frac{۲n^۲-۳۲}{n^۲-۴۱}-۲\right|<\varepsilon$$

اگر نامساوی آخر را بصورت $\left|\frac{۵۰}{n^۲-۴۱}\right|<\varepsilon$ بنویسیم و طرفین را عکس کنیم خواهیم داشت

$$\frac{|n^۲-۴۱|}{۵۰}>\frac{۱}{\varepsilon} \Leftrightarrow |n^۲-۴۱|>\frac{۵۰}{\varepsilon} \Rightarrow n^۲-۴۱>\frac{۵۰}{\varepsilon} \Leftrightarrow n^۲>۴۱+\frac{۵۰}{\varepsilon}$$

اگر $۴۱+\frac{۵۰}{\varepsilon}$ را برابر $۷۱^۲$ قرار دهیم ε برابر $\frac{۱}{۱۰۰}$ خواهد شد.

۳-(۴) هر دنباله همگرا کراندار می‌باشد.

۴-(۳)

$$\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۵^k-۳^k}{۱۰^k}=\sum_{k=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{۲}\right)^k-\sum_{k=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{۵}\right)^k=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۱}{۵}}{۱-\frac{۱}{۵}}=\frac{۳}{۴}$$

۵-(۲) اگر ضابطه تابع را بصورت $f(x)=\begin{cases}۲x+۱ & x>۱\\ ۵x-۲ & x\le ۱\end{cases}$ بنویسید

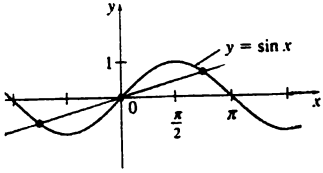
نامساوی $|f(x)|<۰/۰۱$ برای هر دو ضابطه بصورت زیر درمی‌آید.

$$x>۱ \Rightarrow |۲x+۱-۳|<۰/۰۱ \Rightarrow |x-۱|<۰/۰۰۵$$

$$x<۱ \Rightarrow |۵x-۲-۳|<۰/۰۱ \Rightarrow |x-۱|<۰/۰۰۲$$

بین دو مقدار اخیر ۰/۰۰۲ کوچکترین مقدار δ را بدست می‌دهد.

۶-(۲) باید تابع $f(x)=x-\sqrt{۲}Sinx$ را در نظر گرفت چون $f(\frac{\pi}{۳})<۰$ و $f(\frac{\pi}{۲})>۰$ بنابراین در فاصله $(\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۲})$ معادله $f(x)=۰$ یا $x=\sqrt{۲}Sinx$ ریشه خواهد داشت.



روش دوم: مطابق شکل مقابل نمودار $y=Sinx$ و $y=\frac{x}{\sqrt{۲}}$ در سه نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند و یکی از آنها در فاصله $(\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۲})$ واقع است.

۷-(۲) در نقطه $x=۳$ مقدار تابع برابر ۱- و حد راست تابع نیز ۱- است. در نقطه $x=۴$ حد چپ تابع برای مقادیر غیر صحیح x پیوسته برای مقادیر صحیح باید

بررسی شود و مقدار تابع برابر صفر و حد راست ۱ است در $x=۵$ نیز حد چپ و راست و مقدار تابع ۱ است در $x=۶$ حد چپ برابر ۲ و مقدار تابع صفر است و تابع در $x=۶$ ناپیوسته است.

۸-(۲)

$$g(x)=\frac{۱}{f(x)} \Rightarrow g'(x)=\frac{-f'(x)}{(f(x))^{۲}} \Rightarrow g'(۱)=\frac{-f'(۱)}{(f(۱))^{۲}}=\frac{-۱۸}{۱۶}=-\frac{۱}{۲}$$

۹-(۴) چون تابع در R مشتق‌پذیر است و در R پیوسته نیز می‌باشد بنابراین حد چپ و راست در $x=-۱$ برابر است یعنی

$$\lim_{x\to -۱^-} f(x)=\lim_{x\to -۱^+} f(x) \Rightarrow -a+b=۱+a \Rightarrow b=۱+۲a$$

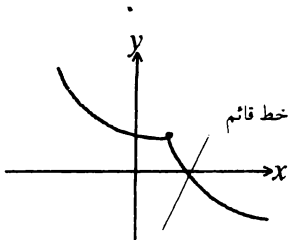
بعلاوه چون تابع در $x=-۱$ مشتق دارد داریم.

$$f'_-(-۱)=f'_+(-۱) \Rightarrow a=۲(-۱)=-۲ \Rightarrow b=-۳$$

۱۰-(۴) از آنجاکه $f(۰)=۲$ در نتیجه $f^{-۱}(۲)=۰$ یعنی $f^{-۱}$ در نقطه به طول ۲ با محور xها برخورد می‌کند در نتیجه شیب خط مماس بر $f^{-۱}(x)$ در نقطه

تلاقی با محور xها برابر است با $(f^{-1})'(۲)=\frac{۱}{f'(۰)}=\frac{۱}{-۲}$ اکنون شیب قائم بر f^{-1} در نقطه تلاقی با محور xها برابر ۲ است.

روش دوم: نمودار f و f^{-1} و خط قائم خواسته شده بصورت مقابل است واضح است که شیب خط قائم بر f^{-1} برابر ۲ است.



۱۱-(۳) مقدار x را برحسب y می‌یابیم داریم

$$y=\frac{x^۲-x+۱}{x^۲+x+۱} \Rightarrow x^۲y+xy+y=x^۲-x+۱ \Rightarrow (y-۱)x^۲+(y+۱)x+y-۱=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{-(y+۱)\pm\sqrt{(y+۱)^۲-۴(y-۱)^۲}}{۲(y-۱)}=\frac{-y-۱\pm\sqrt{-۳y^۲+۱۰y-۳}}{۲(y-۱)}$$

عبارت زیر رادیکال وقتی بامعنی است که $\frac{۱}{۳}\le y\le ۳$ بنابراین برد تابع $[\frac{۱}{۳}, ۳]$ بوده و بیشترین مقدار تابع $y=۳$ است.

روش دوم: اگر $y=f(x)$ عرض نقطه ماکزیمم باشد معادله $y=\frac{x^۲-x+۱}{x^۲+x+۱}$ برای x ریشه مضاعف داشته باشد با توجه به روش اول اگر قرار دهیم $\Delta=۰$ آنگاه داریم

$$(y+۱)^۲-۴(y-۱)^۲=۰ \Rightarrow y+۱=\pm۲(y-۱) \Rightarrow y=۳, y=\frac{۱}{۳}$$

در اینجا $y=۳$ ماکزیمم و $y=\frac{۱}{۳}$ می‌نیمم تابع است.

روش سوم: می‌توان مشتق تابع را برابر صفر قرار داد. مقدار تابع را بازای ریشه‌های مشتق محاسبه و ماکزیمم را بدست آورد.

۱۲-(۱) مشتق f' یعنی f'' دوبار تغییر علامت می‌دهد پس f دو نقطه عطف دارد توجه کنید که ابتدا f' صعودی $(f''(x)>۰)$ و سپس f' نزولی $(f''<۰)$ و سپس مجدداً f' صعودی $(f''>۰)$ است. از طرفی مشتق f یعنی f' یکبار

تغییر علامت می‌دهد و در نتیجه تابع یک می‌نیمم دارد.

۱۳-(۴) واضح است که وقتی $x\to+\infty$ تابع یک مجانب افقی دارد در نتیجه $a=-۱$، توجه کنید که $\sqrt{x^۲+bx+۴}$ هم‌ارز $x+\frac{b}{۲}$ است و $ax+x+\frac{b}{۲}$ وقتی مقداری ثابت است که $a=-۱$، از طرفی $f(۲)=۰$ در نتیجه داریم

$$۰=-۲+\sqrt{۴+۲b+۴}\Rightarrow ۸+۲b=۴\Rightarrow b=-۲\Rightarrow a+b=-۳$$

۱۴-(۱) در $x=۱$ مقدار دو تابع برابر است و نیز شیب خط مماس بر دو نمودار برابر است برای $y=x-\sqrt{x+۳}$ مقدار تابع در $x=۱$ برابر -۱ و شیب خط مماس برابر $\frac{۳}{۴}=۱-\frac{۱}{۴}=y'(۱)$ است برای $y=\frac{ax+b}{x+۱}$ داریم

$$y(۱)=-۱\Rightarrow\frac{a+b}{۱+۱}=-۱\Rightarrow a+b=-۲$$

$$y'=\frac{a(x+۱)-ax-b}{(x+۱)^۲}\Rightarrow y'(۱)=\frac{a-b}{۴}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

روش دوم: بنابه فرض باید معادله $\frac{ax+b}{x+۱}=x-\sqrt{x+۳}$ دارای ریشه مضاعف $x=۱$ باشد بنابراین $x=۱$ در معادله اخیر و مشتق معادله اخیر صدق می‌کند داریم

$$\begin{cases}\dfrac{a+b}{۱+۱}=۱-\sqrt{۴} & \text{معادله}\\ \dfrac{۲a-(a+b)}{(۱+۱)^۲}=۱-\dfrac{۱}{۲\sqrt{۴}} & \text{مشتق معادله}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=-۲\\ a-b=۳\end{cases}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

روش سوم: می‌توان معادله اخیر را بصورت $x-\frac{ax+b}{x+۱}=\sqrt{x+۱}$ نوشته طرفین را به توان رسانده و Δ را مساوی صفر قرار داد.

۱۵-(۴) تابع $f(x)=Sinx$ و $x_۰=۳۰$ و $\Delta x=۱^\circ=\frac{\pi}{۱۸۰}$ در نظر می‌گیریم با توجه به فرمول دیفرانسیل داریم

$$Sin۳۱=f(۳۰+۱)=f(۳۰)+f'(۳۰)\times۱^\circ=\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\frac{\pi}{۱۸۰}$$

۱۶-(۱) با فرض $f(x)=\frac{x^۲-۱}{x^۲}$ و قضیه مقدار میانگین داریم

$$\int_۱^۵ \frac{x^۲-۱}{x^۲}dx=(۵-۱)f(c) \Rightarrow x-\frac{x^{-۱}}{-۱}\Big]_۱^۵=۴\frac{c^۲-۱}{c^۲} \Rightarrow \frac{۱۶}{۵}=۴\frac{c^۲-۱}{c^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۵}c^۲=c^۲-۱ \Rightarrow c^۲=۵ \Rightarrow c=\sqrt{۵}$$

۱۷-(۳) حد صورت مبهم دارد با استفاده از قاعده هوپیتال و هم‌ارزی $Sinx\approx x$ و $tg۲x\approx ۲x$ داریم

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\int_۰^x tg۲tdt}{xSinx}=\lim_{x\to ۰}\frac{tg۲x}{Sinx+xCosx}=\frac{۲}{۱+۱}=۱$$

روش دوم: اگر صورت کسر را محاسبه نمائیم برابر $\frac{۱}{۲}ln|Cos۲x|$ خواهد بود

اکنون مجدداً می‌توانید از قاعده هوپیتال استفاده کنید.

$$F(x)=\int_e^{e^x} tlntdt \Rightarrow F'(x)=(e^xlne^x)e^x=xe^{۲x} \qquad \textbf{(۴)-۱۸}$$

$$\Rightarrow F''(x)=e^{۲x}+۲xe^{۲x} \Rightarrow F''(۱)=e^۲+۲e^۲=۳e^۲$$

روش دوم: می‌توان انتگرال را محاسبه نموده و دوبار مشتق‌گیری نمود.

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^n\frac{۴}{n+۸i}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^n\frac{۴}{۱+۸\,i/n}=\int_۰^۱\frac{۴}{۱+۸x}dx= \qquad \textbf{(۳)-۱۹}$$

$$\frac{۱}{۲}ln(۱+۸x)\Big]_۰^۱=\frac{۱}{۲}ln۹=ln\sqrt{۹}=ln۳$$

$$\int\frac{۲Sin^۲x}{۱+Cosx}dx=\int\frac{۲Sinx(۱-Cos^۲x)}{۱+Cosx}dx=\int ۲Sinx(۱+cosx)dx \qquad \textbf{(۱)-۲۰}$$

$$\frac{۲(۱+Cosx)^۲}{۲}+C_۱=Cos^۲x+۲Cosx+۱+C_۱=(Cosx+۲)Cosx+C$$

روش دوم: اگر گزینه‌ها را بجای $f(x)$ قرار داده و از طرفین مشتق بگیرید به نتیجه می‌رسید.

$$\textbf{(۲)-۲۱} \qquad \text{قرینهٔ } a \text{ نسبت به } b = ۲\frac{a.b}{b.b}b-a=۲\frac{-۳}{۲}(۱,۰,-۱)-(۰,۱,۳)$$

$=(-۳,۰,۳)-(۰,۱,۳)=(-۳,-۱,۰)=-۳i-j$

۲۲-(۲) نقطه $A(۰,۰,۰)$ را روی خط در نظر بگیرید فاصلهٔ نقطه $A_۰(۰,۱,۲)$ از خط برابر است با

$$D=\frac{|AA_۰\times u|}{|u|}=\frac{|-i+۲j-k|}{|i+j+k|}=\frac{\sqrt{۱+۴+۱}}{\sqrt{۱+۱+۱}}=\sqrt{۲}$$

روش دوم: فاصله نقطه $A(t,t,t)$ روی خط از نقطه، $A_۰(۰,۱,۲)$ را یافته و کمترین مقدار آنرا حساب می‌کنیم داریم

$$|AA_۰|=\sqrt{t^۲+(t-۱)^۲+(t-۲)^۲}=\sqrt{۳t^۲-۶t+۵}$$

کمترین مقدار عبارت اخیر بازای ریشهٔ مشتق عبارت زیر رادیکال یعنی $t=۱$ بدست می‌آید که برابر $\sqrt{۲}$ است.

روش سوم: می‌توانید از $d=\sqrt{۳t^۲-۶t+۵}$ بروش عادی هم مشتق بگیرید. و کمترین مقدار آنرا بیابید.

روش چهارم: اگر در روش دوم $AA_۰$ عمود بر U باشد طول $AA_۰$ همان فاصلهٔ نقطه $A_۰$، خط می‌باشد بنابراین باید داشته باشیم

$$(t,t-۱,t-۲).(۱,۱,۱)=۰ \Rightarrow t+t-۱+t-۲=۰ \Rightarrow t=۱ \Rightarrow$$

$$d=|AA_۰|=\sqrt{۱^۲+۰^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۲}$$

۲۳-(۴) عمودمنصف از نقطه $M(۳,۰,۳)$ گذشته و بردار عمود بر صفحه بصورت $(۴,-۴,۶)$ است و صفحه عمودمنصف بصورت $۲x-۲y+۳z-۱۵=۰$ یا $۴(x-۳)+(-۴)y+۶(z-۳)=۰$ است اگر قرار دهیم $y=z=۰$ مقدار x طول نقطه برخورد با محور x حاصل می‌شود که برابر $x=\frac{۱۵}{۲}=۷/۵$ است.

۲۴-(۱)

$$A^t.A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ m & ۳\\ ۲ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & m & ۲\\ ۰ & ۳ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & m & ۲\\ m & m^۲+۳ & ۲m+۱۵\\ ۲ & ۲m+۱۵ & ۲۹\end{bmatrix}$$

$$|A^t.A| = ۲۹(m^۲+۳)+۲m(۲m+۱۵)+۲m(۲m+۱۵)$$
$$-[۴(m^۲+۳)+۲۹m^۲+(۲m+۱۵)^۲]=۰$$

چون $|A^t.A|$ همواره مساوی صفر است m می‌تواند هر عدد حقیقی دلخواهی باشد.

روش دوم: اگر A_{mn} یک ماتریس و $m<n$، آنگاه همواره $A^t.A$ ماتریس $n\times n$ است که دارای دترمینان صفر است.

۲۵-(۱)
$$D=\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ a & b & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۱ \end{vmatrix} = b+۴+۲۰a-(۸b+۵+۲a)=۱۸a-۷b-۱$$

$$\begin{vmatrix} ۱۱ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۱ \\ a & b & -۱ \end{vmatrix} = -۵+۲a+۸b-(۲۰a+b-۴)=-(۱۸a-۷b+۱)=-D-۲$$

۲۶-(۴) باید دترمینان ماتریس متشکل از سه بردار ناصفر باشد داریم

$$\begin{vmatrix} a & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} \neq ۰ \Rightarrow a-۱-(۲)\neq ۰ \Rightarrow a\neq ۳$$

روش دوم: اگر $a=۳$، آنگاه $(a,-۱,۲)=-(۰,۱,۱)+۳(۱,۰,۱)$ و سه بردار مستقل نمی‌باشند در نتیجه اگر $a\neq ۳$، سه بردار مستقل بوده و تشکیل پایه می‌دهد.

۲۷-(۲) هسته عبارت است از کلیه نقاطی چون (x,y,z) که $f(x,y,z)=(۰,۰)$ در نتیجه هسته f بصورت $\begin{cases} x+y-z=۰ \\ x-۲y+z=۰ \end{cases}$ است و دستگاه اخیر معادله خطی گذرنده از مبدأ است و دارای بعد ۱ می‌باشد.

روش دوم: تصویر f یک صفحه است که از بعد ۲ می‌باشد بنابه قضیه داریم

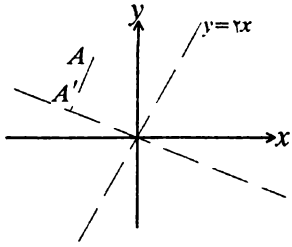
۱=۲-۳=بعد تصویر-بعد دامنه=بعد هسته

۲۸-(۳) چون $|A| = -۳$، مساحت تبدیل یافته هر شکلی تحت f، سه برابر می‌شود چون مساحت مستطیل برابر ۱۶ است مساحت تبدیل یافته برابر ۱۶×۳ یا ۴۸ است.

روش دوم: می‌توان مستقیماً تبدیل یافته را بدست آورده و مساحت آنرا حساب کرد.

۲۹-(۲) $$a_{۲۱} = \frac{A_{۱۲}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} ۰ & ۴ \\ -۲ & ۴ \end{vmatrix}}{۸+۸-(-۱۲+۱۲)} = \frac{-۸}{۱۶} = -\frac{۱}{۲}$$

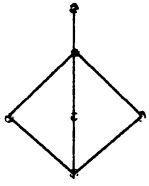
۳۰-(۲) ماتریس نگاشت تصویر روی خط $y=-\frac{۱}{۲}x$ دارای دو مقدار ویژه ± ۱ می‌باشد. توجه کنید تحت تبدیل مذکور که راستای بردارهای موازی و عمود بر خط $y=-\frac{۱}{۲}x$ ثابت می‌ماند.



روش دوم: ماتریس نگاشت تصویر روی خط $y=mx$ همواره دارای دو مقدار ویژه ± ۱ می‌باشد.

روش سوم: می‌توان ماتریس مربوط به تبدیل مورد نظر را بدست آورده و مستقیماً مقادیر خاص را محاسبه نمود.

۳۱-(۳) می‌توان نمودار گراف را که الزاماً بصورت مقابل است رسم نمود و به نتیجه رسید.



۳۲-(۲) هر گراف فاقد دور درخت می‌باشد بنابراین $q=p-۱$ در نتیجه $p+q=۲p-۱$ در نتیجه مجموع مرتبه و اندازه فرد می‌باشد.

۳۳-(۳) بنابه فرض $a=bq+q$، با توجه به تعریف $q<b$ با توجه به فرض تساوی $a=(b-۳)(q+۵)$ نیز برقرار است در نتیجه از دو تساوی اخیر خواهیم داشت.

$bq+q=(b-۳)(q+۵) \Rightarrow q=۵b-۳q-۱۵ \Rightarrow ۴q=۵(b-۳)$

$$\Rightarrow \frac{q}{b-۳}=\frac{۵}{۴} \Rightarrow q=۵,\ b=۷ \text{ یا } q=۱۰,\ b=۱۱ \ldots$$

توجه کنید که حالات دیگری برای q و b موجود است که با شرط $q<b$ سازگار نمی‌باشند.

۳۴-(۳) کوچکترین عضو مثبت مجموعه $\{ma+nb:\ m,n\in Z\}$ همان ب.م.م دو عدد a و b است داریم

$$\begin{cases}(a,b)=d=۸\\ a+b=۱۰۴\end{cases} \Rightarrow a'd+b'd=۱۰۴ \Rightarrow a'+b'=\frac{۱۰۴}{d}=۱۳$$

$$\Rightarrow a'=۷,\ b'=۶ \Rightarrow [a,b]=a'b'd=۷\times۶\times۸=۳۳۶$$

۳۵-(۴) $۵۴\mid(a+b)^۲ \Rightarrow ۶\mid(a+b)^۲ \Rightarrow ۲\mid(a+b)^۲$ و $۳\mid(a+b)^۲$

$$\Rightarrow ۲\mid a+b \text{ و } ۳\mid a+b \Rightarrow (a,b)=۱ \Rightarrow ۲\nmid a \text{ و } ۳\nmid a \Rightarrow [a,۳۶]=۳۶a$$

روش دوم: اگر $a=۱$ و $b=۱۷$ تمام شرایط مسئله برقرار است و در این حالت چون $[۱,۳۶]=۳۶$ فقط گزینه ۴ صحیح است.

۳۶-(۳) عدد ۶۵ بصورت $۱۳\times۵=۶۵$ تجزیه می‌شود باید اعدادی چون n را بیابیم که $۲^n+۱$ بر ۵ و ۱۳ بخش‌پذیر باشد. از آنجا که $(۲^۲)^{۲k+۱}\overset{۵}{\equiv}۰$ و $(۲^۶)^{۲k+۱}+۱\overset{۱۳}{\equiv}۰$ باید بین ۱ تا ۱۰۰ اعدادی را بیابیم که مضرب $۲\times۶=۱۲$ می‌باشند و اعداد ۱۲, ..., ۹۶ که ۸تا هستند مطلوب مسئله هستند.

روش دوم: تعداد اعداد مذکور را می‌توان از محاسبه عبارت $[\frac{۱۰۰}{۱۲}]$ که برابر ۸ می‌باشد بدست آورد.

۳۷-(۱) $۸a\equiv۶۴(۱۲) \Rightarrow$ (پیمانه ۱۲) $-۴a\equiv۴(۱۲) \Rightarrow$ (پیمانه ۳) $-a\equiv۱(۳) \Rightarrow$

$$-a-۱\equiv۰(۳) \Rightarrow \text{(پیمانه ۳)} \quad a+۱\equiv۰(۳) \Rightarrow a+۱=۳k$$

روش دوم: بازای $a=۸$ رابطه (پیمانه ۱۲)$۸a\equiv ۶۴$ برقرار است و $a=۸$ فقط در گزینهٔ ۱ صادق است.

۳۸-(۴) شرطهای $M^{۲}«M$ و $I«M$ و $M^{T}=M$ بترتیب از خواص تراگذاری و بازتابی و تقارنی نتیجه می‌شود.

۳۹-(۲) چون جمع سه مهره زوج است الزاماً ۲ مهره فرد و یکی زوج است و تعداد حالات مطلوب برابر $\binom{۲}{۱}\times\binom{۳}{۲}=۳\times۶=$ و تعداد کل حالات $\binom{۵}{۳}=۱۰$ و احتمال مورد نظر برابر $\frac{۶}{۱۰}=۰/۶$ می‌باشد.

۴۰-(۱)
$$\Sigma P(x)=۱ \Rightarrow \Sigma P(x)=ap(۱-۲p)^{۰}+ap(۱-۲p)+\ldots=$$
$$ap(۱+(۱-۲p)+(۱-۲p)^{۲}+\ldots)=ap\frac{۱}{۱-(۱-۲p)}=۱ \Rightarrow a=۲$$

سوالات کنکور پیشدانشگاهی ۷۸-۷۷

۱- اگر $(A\cup B)\subset B$، $(A\cup B)\subset A$ آنگاه الزاماً ...

۱) $A'=B'$ ۲) $A=B'$

۳) $A'=B$ ۴) $A\subset A'\cup B'$

۲- اگر $a=۰/\overline{۵۴}$ آنگاه $\sqrt{۱۰a}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۱۷}{۹}$ ۴) $\frac{۲۳}{۹}$

۳- ساده شده کسر $\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۵}}{\sqrt{۶}+\sqrt{۵}}$ کدام است؟

۱) $۹-۲\sqrt{۳۰}$ ۲) $۱۱-۲\sqrt{۳۰}$

۳) $۹+۲\sqrt{۳۰}$ ۴) $۱۱+۲\sqrt{۳۰}$

۴- ساده شده عبارت $\frac{sin\theta}{\frac{۱}{sin\theta}+۱}+\frac{sin\theta}{\frac{۱}{sin\theta}-۱}$ کدام است؟

۱) $tg^{۲}\theta$ ۲) $cotg^{۲}\theta$

۳) $۲cotg^{۲}\theta$ ۴) $۲tg^{۲}\theta$

۵- به‌ازای کدام مقادیر x، نامساوی $|x+۲|\geq ۴$ برقرار است؟

۱) $x\geq -۲$ ۲) $x\leq ۲$

۳) $x\geq ۲$ یا $x\leq -۶$ ۴) $-۶\leq x\leq ۲$

۶- ضرب یک ماتریس دو سطر و سه ستونی در کدام نوع ماتریس امکان‌پذیر است؟

۱) یک سطر و دو ستونی ۲) دو سطر و چهار ستونی

۳) سه سطر و یک ستونی ۴) چهار سطر و دو ستونی

۷- ساده شده عبارت $\log_{\sqrt{۳}} ۹\sqrt{۳}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۸- میزان بارندگی در ده سال اخیر در یک منطقه از کشور برحسب سانتیمتر عبارت است از: ۳۷، ۳۶، ۳۳، ۴۰، ۳۹، ۳۶، ۳۸، ۳۶، ۳۳، ۳۷ مد این داده‌ها کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۶ ۳) ۳۷ ۴) ۴۰

۹- اگر $\begin{cases} ۲x+y+z=۵ \\ x-۲y+z=۴ \\ -x-y-۲z=۱ \end{cases}$ مقدار $x-y$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰- مجموع اعداد طبیعی کمتر از ۵۰ که بر ۳ بخشپذیرند کدام است؟

۱) ۴۰۲ ۲) ۴۰۵ ۳) ۴۰۸ ۴) ۴۱۱

۱۱- اگر $tg\alpha=\frac{۱}{۳}$ و $tg\beta=-\frac{۱}{۲}$، مقدار $tg(\alpha+\beta)$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۷}$ ۲) $-\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۲- زاویه بین دو بردار $\vec{V}_۱=\begin{bmatrix} ۱ \\ \sqrt{۲} \end{bmatrix}$ و $\vec{V}_۲=\begin{bmatrix} -\sqrt{۲} \\ ۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۴۵° ۲) ۹۰° ۳) ۱۳۵° ۴) ۱۸۰°

۱۳- از کیسه محتوی ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه، دو مهره خارج کرده‌ایم، احتمال اینکه دو مهره همرنگ باشند کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۱۴- در معادله درجه دوم $x^۲-۹x+n=۰$ یکی از ریشه‌ها دو برابر ریشه دیگر است، n کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۱۵- حاصل $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۱})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۶- تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x+a & x>۱\\ ۲ & x=۱\\ x-۲b & x<۱\end{cases}$ در نقطه $x=۱$ پیوسته است. $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۷- اگر $g(۱)=۲$ و $g'(۱)=-۱$ و $(fog)'(۱)=-۳$، آنگاه $f'(۲)$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۳

۱۸- اگر تابع $y=-x^۲+kx+k$ دارای ماکزیممی برابر $۲k$ باشد، k کدام است؟

۱) ۴، ۰ ۲) ۶، ۰ ۳) ۴، ۲ ۴) ۶، ۲

۱۹- بیشترین مقدار عبارت $sinx+\sqrt{۲}cosx$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۱+\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۱+\sqrt{۳}$

۲۰- ماکزیمم مساحت مثلثی از بین تمام مثلثهای قائم‌الزاویه که مجموع دو ضلع زاویه قائم آنها ۱۲ است، کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

۲۱- جمعیت کشوری بعد از ۲۵ سال دو برابر می‌شود، جمعیت این کشور بعد از چند سال ۸ برابر می‌شود؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۳۵ ۳) ۱۰۰ ۴) ۷۵

۲۲- مجانبهای یک هذلولی به معادلات $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 2x-y=5 \end{cases}$ است. مختصات مرکز هذلولی کدام است؟

۱) $(-2,-1)$ ۲) $(-2,1)$

۳) $(2,-1)$ ۴) $(2,1)$

۲۳- اگر $G(x)=\int_{1}^{x} Arcsintdt$، مقدار $G'(-1)$ کدام است؟

۱) $-1+\frac{\pi}{2}$ ۲) $-\frac{\pi}{2}$

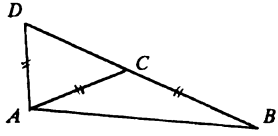
۳) $-1+\pi$ ۴) π

۲۴- مجموع دو زاویه ۷۵ درجه است. مجموع مکملهای آنها چند درجه است؟

۱) ۲۶۵ ۲) ۲۷۵

۳) ۲۸۵ ۴) ۲۹۵

۲۵- در شکل مقابل زاویه A برابر 90° درجه است. اگر $AC=AD=BC$ زاویه C چند درجه است؟



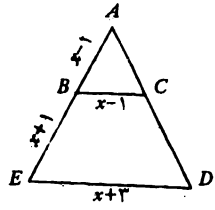
۱) ۱۰۵ ۲) ۱۱۵

۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵

۲۶- میانگین هندسی دو عدد ۱۴ است. حاصلضرب آن دو عدد کدام است؟

۱) ۱۶۹ ۲) ۱۷۶

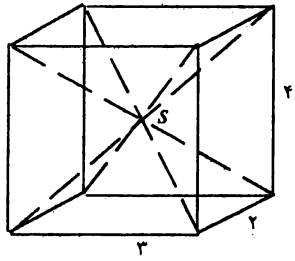
۳) ۱۸۲ ۴) ۱۹۶



۲۷- در شکل مقابل خط BC با خط DE موازی است. مقدار x کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵

۳) ۳ ۴) ۳/۵



۲۸- حجم بین مکعب مستطیل و دو هرم شکل مقابل با رأس S چند واحد مکعب است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۶

۳) ۱۵ ۴) ۱۴

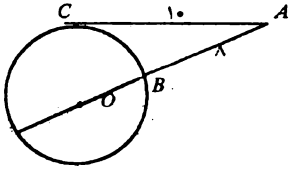
۲۹- مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط می‌توان دو خط عمود برهم و مماس بر دایره به شعاع ۲ رسم نمود کدام است؟

۱) دایره به شعاع ۴ ۲) دایره به شعاع $۲\sqrt{۲}$

۳) مربع به ضلع ۴ ۴)مربع به ضلع $۲\sqrt{۲}$

۳۰[1]**-** دو دایره به شعاعهای ۲ و ۵ در صفحه طوری قرار دارند که طول خط مماس خارج بر آنها و محدود به نقاط تماس برابر ۵ است. طول خط‌المرکزین دو دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۶}$ ۲) $\sqrt{۳۹}$ ۳) $\sqrt{۳۱}$ ۴) $\sqrt{۳۴}$



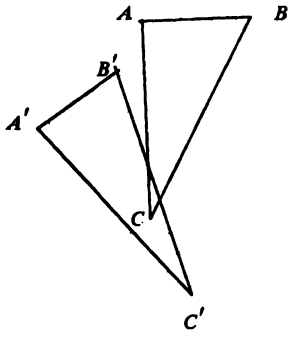
۳۱- در شکل مقابل شعاع دایره چقدر است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲/۲۵

۳) ۲ ۴) ۱/۷۵

۱- درگزینه‌ها تصحیح به عمل آمده

۳۲- در شکل مقابل مرکز دوران کجا قرار دارد؟ (دو مثلث دوران یافته هم‌اند.)



۱) داخل هر دو مثلث

۲) خارج هر دو مثلث

۳) فقط داخل مثلث ABC

۴) فقط داخل مثلث $A'B'C'$

۳۳- هر خط عمود بر یکی از دو صفحه عمود برهم .....

۱) با صفحه دیگر موازی است

۲) بر صفحه دیگر عمود است

۳) با فصل مشترک دو صفحه موازی است

۴) واقع در صفحه دیگر است

۳۴- کدام حکم زیر یک قضیه کلی است؟

۱) هر عدد اول فرد است

۲) هر لوزی یک مستطیل است

۳) هر مستطیل یک لوزی است

۴) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین است

۳۵- اگر مجموعه A دارای ۲۵ عضو و مجموعه A^2-B^2 دارای ۵۴۴ عضو باشد آنگاه مجموعه $A\cap B$ چند عضو دارد؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۳۶- مجموعه‌ای دارای ۱۵ عضو است. این مجموعه را به ۹ زیرمجموعه افراز کرده‌ایم حداکثر عضو یکی از زیرمجموعه‌ها کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳۷- سه سکه را پرتاب می‌کنیم احتمال اینکه حداقل یکی از سه سکه به پشت بیفتد کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۳۸-[1] بر بازه $[۰,۱]$ دو عدد را انتخاب می‌کنیم، احتمال آنکه مجموع این دو عدد بین ۰/۶ و ۱/۲ باشد کدام است؟

۱) ۰/۴۸ ۲) ۰/۶۰

۳) ۰/۵۴ ۴) ۰/۵۰

۳۹- احتمال بارش باران در هفته آخر پاییز ۰/۱۵ و احتمال بارش برف ۰/۱۸ است و احتمال بارش هردو ۰/۱۲ است. احتمال اینکه در هفته آخر برف یا باران ببارد کدام است؟

۱) ۰/۲۱ ۲) ۰/۲۲

۳) ۰/۲۳ ۴) ۰/۲۴

۴۰- حاصل $(۱+i)^{۱۲}$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۳۲

۳) -۳۲ ۴) -۶۴

۱- در صورت تست اصلاح به عمل آمده

پاسخ تشریحی کنکور پیشدانشگاهی ۷۸-۷۷

۱-(۴) چون $A\cup B\subset B$ بنابراین $A\subset B$ و همینطور چون $A\cup B\subset A$ در نتیجه $B\subset A$ و از این دو تساوی $A=B$ و یا $A'=B'$ نتیجه می‌شود.

روش دوم: با رسم نمودار ون ملاحظه می‌شود که هیچکدام از حالات $A=B'$ و $B'=A$ و $A\subset A'\cup B'$ با فرضهای مسئله سازگار نمی‌باشند.

روش سوم: $A\cup B\subset B: x\in A \Rightarrow x\in A\cup B \Rightarrow x\in B \Rightarrow A\subset B$ (۱)

$A\cup B\subset A: x\in B \Rightarrow x\in A\cup B \Rightarrow x\in A \Rightarrow B\subset A$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow A=B \Rightarrow A'=B'$

روش چهارم: شرایط مسئله برای A و B یکسان است بعبارتی روابط نسبت به A و B متقارن است بنابراین حکمی که باید نتیجه شود نیز باید نسبت به A و B متقارن یا یکسان باشد و فقط گزینه ۱ چنین است.

۲-(۲) $a=۰/۵\overline{۴}=\frac{۵۴-۵}{۹۰}=\frac{۴۹}{۹۰} \Rightarrow \sqrt{۱۰a}=\frac{۷}{۳}$

روش دوم:

$$a=۰/۵+\frac{۴}{۱۰۰}+\frac{۴}{۱۰۰۰}+\ldots=۰/۵+\frac{\frac{۴}{۱۰۰}}{۱-\frac{۱}{۱۰}}=\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۴۵}=\frac{۴۹}{۹۰}$$

روش سوم: می‌توان a را از $۱۰a$ کم نمود و به روش عادی مسئله را حل نمود.

۳-(۲) $\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۵}}{\sqrt{۶}+\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۵}}{\sqrt{۶}+\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۵}}{\sqrt{۶}-\sqrt{۵}}=۱۱-۲\sqrt{۳۰}$

روش دوم: صورت کسر کوچک و مثبت و مخرج از ۴ بزرگتر است و حاصل کسر باید از $\frac{۱}{۴}$ کوچکتر و از صفر بزرگتر باشد حاصل گزینه ۱ عددی منفی است و گزینه‌های ۳ و ۴ از ۱۰ بزرگترند.

(۴)-۴ $\frac{Sin^۲\theta}{۱-Sin\theta}+\frac{Sin^۲\theta}{۱+Sin\theta}=\frac{Sin^۲\theta+Sin^۳\theta+Sin^۲\theta-Sin^۳\theta}{۱-Sin^۲\theta}=$

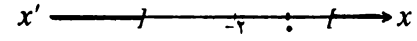
$=\frac{۲Sin^۲\theta}{Cos^۲\theta}=۲tg^۲\theta$

روش دوم: عبارت داده شده بازاء $\theta=۰$ و $\theta=\frac{\pi}{۲}$ بترتیب صفر و بی‌معنی است و فقط گزینه ۴ چنین است.

(۳)-۵ $x\leq -۶$ یا $x\geq ۲ \Leftrightarrow x+۲\leq -۴$ یا $x+۲\geq ۴ \Leftrightarrow |x+۲|\geq ۴$

روش دوم: $x=۰$ در نامعادلهٔ $|x+۲|\geq ۴$ صدق نمی‌کند در حالی‌که در گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴ قرار دارد. پس همگی اینها غلط هستند و گزینه ۳ درست است.

روش سوم: مجموعه نقاط صادق در نامعادلهٔ $|x+۲|\geq ۴$ مطابق شکل کلیه نقاطی از محور xها است که فاصله آنها تا نقطه ۲- بزرگتر یا مساوی ۴ باشد. و این مجموعه گزینه ۳ است



(۳)-۶ ماتریس A، ۲×۳ است و باید در ماتریس ضرب شود که سه سطر داشته باشد.

(۳)-۷ $log_{\sqrt{۳}}\ ۹\sqrt{۳}=log_{\sqrt{۳}}\ (\sqrt{۳})^۵=۵log_{\sqrt{۳}}\ \sqrt{۳}=۵$

روش دوم: $log_{\sqrt{۳}}\ ۹\sqrt{۳}=۲log_{۳}۹\sqrt{۳}=۲log_{۳}۳^{۵/۲}=۲\times\frac{۵}{۲}=۵$

(۲)-۸ داده ۳۶ سه‌بار تکرار شده و مد داده‌هاست.

(۴)-۹ در دستگاه $\begin{cases} ۲x+y+z=۵ \\ x-۲y+z=۴ \\ -x-y-۲z=۱ \end{cases}$ اگر سه معادله را جمع کنیم معادله

$۲x-۲y=۱۰$ یا $x-y=۵$ حاصل می‌شود.

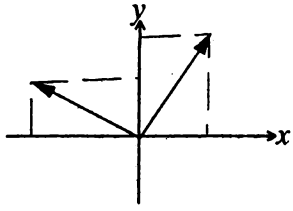
روش دوم: می‌توان از دستگاه x و y و z را یافته و به نتیجه رسید.

۱۰-(۳) $۳+۶+...+۴۸=۳(۱+۲+...+۱۶)=۳\frac{۱۶(۱۶+۱)}{۲}=۴۰۸$

۱۱-(۱) $tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{۱-tg\alpha tg\beta}=\frac{\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۳}(-\frac{۱}{۲})}=-\frac{۱}{۷}$

۱۲-(۲) $Cos\theta=\frac{V_۱.V_۲}{|V_۱||V_۲|}=\frac{-\sqrt{۲}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}=۰\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۲}$

روش دوم: روی دستگاه مختصات دو بردار بصورت مقابل هستند و بوضوح زاویه بین آندو ۹۰ درجه است.



روش سوم: طول هر بردار $\sqrt{۳}$ است و فاصله بین نوک دو بردار $\sqrt{۶}$ است و بنابه قضیه فیثاغورث مثلث که دو ضلع آن $V_۱$ و $V_۲$ است قائم‌الزاویه است.

۱۳-(۱) احتمال آنکه مهره اول سفید باشد $\frac{۳}{۷}$ است و احتمال آنکه دومی هم سفید باشد $\frac{۲}{۶}$ است در نتیجه احتمال آنکه هردو سفید باشند $\frac{۲}{۶}\times\frac{۳}{۷}$ است بصورت مشابه احتمال آنکه هردو سیاه باشند $\frac{۳}{۶}\times\frac{۴}{۷}$ بوده و مجموعاً احتمال آنکه دو مهره همرنگ باشند $\frac{۳}{۶}\times\frac{۴}{۷}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۳}{۷}$ یا $\frac{۳}{۷}$ است.

روش دوم: می‌توان احتمال آنکه دو مهره همرنگ باشند از یک کم نمود. حاصل احتمال مشاهده دو مهره همرنگ است.

۱۴-(۴) اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌ها باشند و $x_۲=۲x_۱$ آنگاه داریم

$x_۱+x_۲=۹$ و $x_۲=۲x_۱\Rightarrow x_۱+۲x_۱=۹\Rightarrow x_۱=۳\Rightarrow$

$۳^۲-۹\times۳+n=۰\Rightarrow n=۱۸$

۱۵-(۱) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2\sqrt{x}}=0$

روش دوم: هر چقدر x بزرگتر باشد اختلاف $\sqrt{x+1}$ و $\sqrt{x-1}$ کمتر می‌شود و به سمت صفر میل می‌کند.

۱۶-(۱) $\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)=\lim_{x\to1^+}f(x)\Rightarrow 1-2b=2=1+a\Rightarrow$

$a=1$ و $b=-\frac{1}{2}\Rightarrow a+b=\frac{1}{2}$

۱۷-(۴) $(fog)'(1)=-3\Rightarrow f'(g(1)).g'(1)=-3\Rightarrow f'(2).(-1)=-3$

$\Rightarrow f'(2)=3$

۱۸-(۱) ماکزیمم $2k$ بازای ریشه مشتق حاصل می‌شود.

$y'=-2x+k=0\Rightarrow x=\frac{k}{2}\Rightarrow -(\frac{k}{2})^2+k(\frac{k}{2})+k=2k\Rightarrow k^2-4k=0$

$\Rightarrow k=0$ یا $k=4$

روش دوم: ماکزیمم یک تابع درجه ۲ برابر $\frac{-\Delta}{4a}$ است در نتیجه $\frac{-4k-k^2}{-4}=2k$

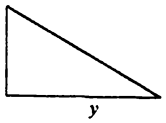
بنابراین $k=4$ یا $k=0$.

روش سوم: ماکزیمم یا می‌نیمم تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ در $x=-\frac{b}{2a}$ اتفاق می‌افتد.

۱۹-(۳) ماکزیمم $aSinx+bCosx$ همواره برابر $\sqrt{a^2+b^2}$ است. در اینجا ماکزیمم $\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}$ یا $\sqrt{3}$ است.

روش دوم: می‌توانید مشتق عبارت را مساوی صفر قرار دهید و ماکزیمم بازای یکی از ریشه‌ها حاصل می‌شود.

۲۰-(۱) در بین مثلثهای قائم‌الزاویه با مجموع دو ضلع زاویه قائمه ثابت، مثلث متساوی‌الساقین بیشترین مساحت را دارد بنابراین اضلاع مورد نظر برابر ۶ بوده و مساحت مثلث $\frac{6\times6}{2}=18$ است.



روش دوم: اگر دو ضلع را مطابق شکل مقابل x و y در نظر بگیریم آنگاه $x+y=۱۲$ بوده و باید ماکزیمم $S=\frac{xy}{۲}=\frac{x(۱۲-x)}{۲}$ را حساب کرد. داریم

$$S'=۶-x=۰ \Rightarrow x=۶ \Rightarrow Max(S)=\frac{۶\times۶}{۲}=۱۸$$

روش سوم: اگر مقدار مشخص مانند ۴ و ۵ و ۶ را برای x انتخاب کنیم مجدداً می‌توان به نتیجه رسید.

۲۱-(۴) $y=y_۰e^{kt}\ \ (t=۲۵) \Rightarrow ۲y_۰=y_۰e^{۲۵k} \Rightarrow ۲۵k=ln۲ \Rightarrow k=\frac{۱}{۲۵}ln۲$

$$۸y_۰=y_۰e^{kt} \Rightarrow ۸=e^{t/۲۵ln۲} \Rightarrow ln۸=\frac{t}{۲۵}ln۲ \Rightarrow ۳ln۲=\frac{t}{۲۵}ln۲ \Rightarrow t=۷۵$$

۲۲-(۳) محل برخورد دو مجانب مرکز هذلولی است داریم از جمع دو معادله تساوی $۴x=۸$ یا $x=۲$ حاصل می‌شود و سپس از هریک معادلات $y=-۱$ نتیجه می‌شود.

۲۳-(۲) $G(x)=\int_۱^x Arcsintdt \Rightarrow G'(x)=ArcSinx \Rightarrow G'(-۱)=-\frac{\pi}{۲}$

روش دوم: می‌توان انتگرال را محاسبه و از آن مشتق گرفت.

۲۴-(۳) $x+y=۷۵° \Rightarrow$ مجموع مکملها $=۱۸۰-x+۱۸۰-y=۲۸۵$

۲۵-(۳)

$$\begin{cases} \angle B+\angle D=۹۰° \\ \angle B=\angle A_۲ \\ \angle A_۱+\angle A_۲=۹۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \angle A_۲+\angle D=۹۰ \\ \angle A_۱+A_۲=۹۰ \end{cases} \Rightarrow \angle A_۱=\angle D$$

$$(\angle D=\angle C_۱) \Rightarrow \angle A_۱=\angle D=\angle C_۱=۶۰ \Rightarrow \angle C=۱۲۰°$$

روش دوم: اگر گزینه‌ها را در شکل آزمایش کنید غیر از ۱۲۰ همگی به تناقض منجر می‌شوند.

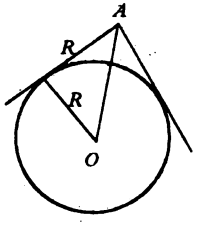
$\sqrt{ab}=۱۴ \Rightarrow ab=۱۴^۲=۱۹۶$ **(۴)-۲۶**

$\frac{x-۱}{x+۳}=\frac{x-۱}{x-۱+x+۱} \Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰ \Rightarrow x=۳$ **(۳)-۲۷**

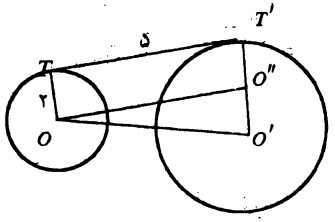
در اینجا ابتدا از قضیه تالس استفاده نموده و سپس $x=۱$ نیز قابل قبول نیست چون طول BC را صفر می‌کند.

۲۸-(۲) حجم مکعب برابر $V=۴\times۲\times۳=۲۴$ است و حجم هرم برابر $V'=\frac{۱}{۳}(۲\times۳)\times۲=۴$ می‌باشد و حجم خواسته برابر $V-۲V'=۱۶$ است.

۲۹-(۲) مکان مورد نظر دایره‌ای است به مرکز دایره اول و شعاع $R\sqrt{۲}$ و به نام دایره مونژ شناخته می‌شود.



روش دوم: بدیهی است که دو خط مماس طول یکسان داشته باشد مطابق شکل نقطه A روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $OA=R\sqrt{۲}$ حرکت خواهد کرد.



۳۰-(۱) اگر از O موازی TT' رسم کنیم OO'' مساوی TT' بوده و در در مثلث $OO'O''$ داریم

$OO'=\sqrt{۵^۲-(۵-۲)^۲}=\sqrt{۲۵-۹}$

روش دوم: از فرمول $OO'^۲=TT'^۲-(R-R')^۲$ نیز می‌توان به نتیجه رسید.

۳۱-(۲) با فرض $OC=OB=x$ و از قضیه فیثاغورث داریم

$AO^۲=OC^۲+AC^۲ \Rightarrow x^۲+۱۰۰=(۸+x)^۲ \Rightarrow ۱۶x=۳۶ \Rightarrow x=\frac{۹}{۴}$

۳۲-(۲) مرکز دوران باید روی عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AA' و BB' و CC' قرار گیرد.

۳۳-(۱) اگر دو صفحه برهم عمود باشند هر خط عمود بر یکی با دیگری

موازیست.

۳۴-(۴) بدیهی است که مثلث متساوی‌الاضلاع، الزاماً متساوی‌الساقین است.

۳۵-(۲) $n(A^{۲}-B^{۲})=n(A^{۲})-(n(A\cap B))^{۲} \Rightarrow ۵۴۴=۶۲۵-x^{۲} \Rightarrow x=۹$

۳۶-(۳) حداکثر تعداد عضو یکی از زیرمجموعه‌ها برابر $۷=۱+۹-۱۵$ است.

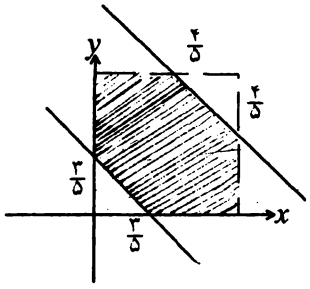
روش دوم: اگر هشت مجموعه یک عضو داشته باشد آنگاه آخرین مجموعه ۷ عضو دارد.

۳۷-(۱) $P(A)=\binom{۳}{۱}(\frac{۱}{۲})^{۱}(۱-\frac{۱}{۲})^{۲}+\binom{۳}{۲}(\frac{۱}{۲})^{۲}(۱-\frac{۱}{۲})^{۱}+\binom{۳}{۳}(\frac{۱}{۲})^{۳}$

$=\frac{۳}{۸}+\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$

روش دوم: $P(A')=(\frac{۱}{۲})^{۳}=\frac{۱}{۸} \Rightarrow P(A)=۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$

۳۸-(۴) اگر دو عدد را x و y بنامیم باید داشته باشیم $۰/۶\le x+y\le ۱/۲$ مجموعه (x,y) هائی که در نامساوی مضاعف اخیر صدق کند منطقه هاشور خورده شکل مقابل است و مساحت آن برابر



$۱-\frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۵}\times\frac{۳}{۵})-\frac{۱}{۲}(\frac{۴}{۵}\times\frac{۴}{۵})=۰/۵$

است و احتمال مورد نظر برابر $\frac{۰/۵}{۱}=۰/۵$ است.

۳۹-(۱) $P(\text{باران یا برف})=P(\text{برف})+P(\text{باران})-P(\text{باران و برف})$

$=۰/۱۸+۰/۱۵-۰/۱۲=۰/۲۱$

۴۰-(۴) $(۱+i)^{۱۲}=[\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}i)]^{۱۲}$

$(\sqrt{۲})^{۱۲}[Cos۱۲\frac{\pi}{۴}+iSin۱۲\frac{\pi}{۴}]=۲^{۶}[-۱+۰]=-۶۴$

کتابخانه مجازی ریاضیات

۷۷۷۷

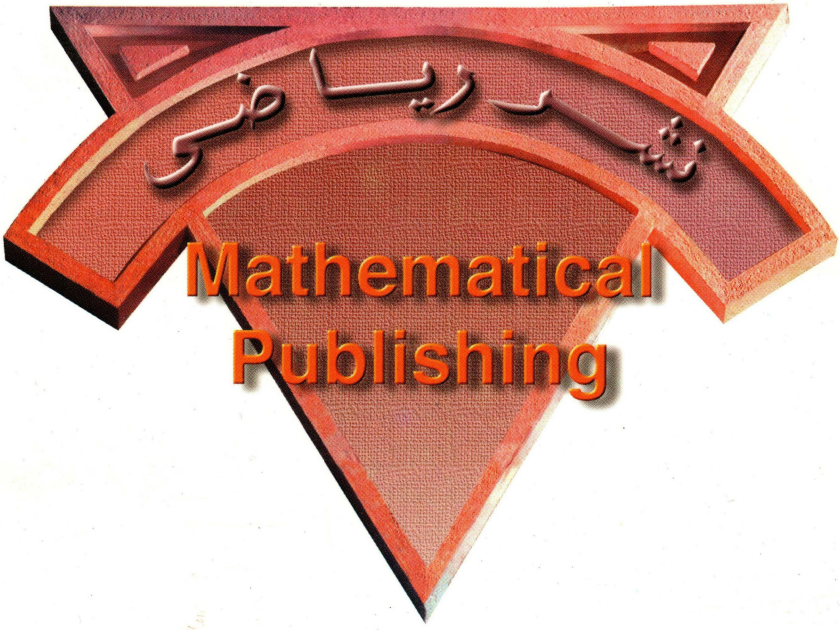
آزمون جامع ریاضی

7777

Test of Mathematics

کامل ترین مجموعه آزمون ریاضی دنیا

۷۷۷۷ آزمون جامع ریاضی



همراه با ۷۷۷۷ پاسخ تشریحی

ویژه دانش آموزان نظام جدید و قدیم

از دوره ابتدایی تا دوره های دانشگاهی

برای کسب اطلاعات بیشتر به صفحات آخر همین کتاب مراجعه کنید .

شابک : ۰-۵-۹۱۸۸۱ - ۹۶۴ (جلد۶)

Isbn: 964 - 91881-5-0 (VOL . 6)

شابک : ۶-۲- ۹۱۸۸۱ - ۹۶۴ (دوره ۱۱ جلدی)

ISBN : 964 - 91881- 2-6 (11VOL . SET)